

武蔵工業大学 ○学生員 永田 茂 正会員 星谷 勝

1. まえがき

単一破壊モードの破壊確率算定手法と同様に、複数の破壊モードを有するシステムの破壊確率算定手法もまた、構造信頼性の分野における重要な研究テーマの1つである。構造信頼性で対象とする多くのシステムも互いに相関関係にある多数の破壊モードを持つ場合が多い為、システム破壊確率の理論解算出に当たっては、多重積分を解く必要があり数値解析上の大きな傷害となっている。このため、システム破壊確率の近似解を少ない計算時間で精度良く求めるための多くの研究が行われてきており、特に有効な手段の1つである確率の上下限値推定法に関しては多くの関係式が提案されている。

本報告では、システム破壊確率 $P(F)$ が各破壊モード $E_i (i=1, 2, \dots, m)$ の和集合の確率 $P(F)=(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m)$ (1)で表される場合の既往の研究成果を整理すると共に、例題を通して各提案式の問題点を整理する。

2. システム破壊確率算定式

$$1) \text{ 1次の範囲}^{1)} \max_i P(E_i) \leq P(F) \leq 1 - \prod_{i=1}^m \{1 - P(E_i)\} \quad (2)$$

$$2) \text{ 2次の範囲}^{12)} P(E_1) + \sum_{i=2}^m \max\{P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_j E_i)\}, 0\} \leq P(F) \leq \min\left\{\sum_{i=1}^m P(E_i) - \sum_{j=2}^m \max\{P(E_j E_i) - \sum_{k=1}^{j-1} P(E_k E_i)\}, 1\right\} \quad (3)$$

但し、 $P(E_1) > P(E_2) > \dots > P(E_m)$

式(3)に於て、特にモード E_i の破壊標準化変数 $Z_i = g_i(x)$ が正規確率変数で、各モード間の相関係数 ρ_{ij} が正の場合の $P(E_i E_j)$ は、 $\max[P(A), P(B)] \leq P(E_i E_j) \leq P(A) + P(B)$ (4)

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_j - \rho_{ij} \beta_i}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right), \quad P(B) = \Phi(-\beta_j) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho_{ij} \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right), \quad \rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(g_i, g_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

、 $\Phi(\cdot)$ = 標準正規確率分布関数となることが提案されている²⁾。一方、 $P(E_i E_j)$ を、重積分によって求める事により更に正確な2次の範囲が求められる。

$$3) \text{ 3次の範囲}^{3)} \begin{cases} \geq P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) + \sum_{i=3}^m \max\{P(E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_j E_i) + \sum_{j=2}^{i-1} \max\{P(E_k E_j E_i)\}, 0\} \\ P(F) \leq \min\left[\sum_{i=1}^m P(E_i) - P(E_1 E_2) - \sum_{i=3}^m \max\{P(E_k E_j E_i) + P(E_j E_i) - P(E_k E_j E_i)\}, 1\right] \end{cases} \quad (5)$$

2次の範囲と同様に上式の $P(E_i E_j)$ 、 $P(E_i E_j E_k)$ を多重積分を用いて求めることによって正確な範囲推定が可能となる。しかし、3重積分は重積分と比較して計算時間がかかるため $P(E_i E_j E_k)$ を

$$P(E_i E_j E_k) \geq P(E_i E_j) P(E_i E_k) / P(E_i) \quad \rho_{jk} \geq \rho_{ij} \rho_{ik} \quad (6)$$

と置くことにより下限値推定の精度や計算時間の向上が成されることが報告されている。

$$4) \text{ Vanmarkeの上限値}^{4)} P(F) \leq P(E_1) + \sum_{i=2}^m \{\min P(E_j | E_i)\} P(E_i) \\ P(E_j | E_i) \approx 1 - P[Z_i < -\max\{\beta_j / |\rho_{ij}|, \beta_i\}] / P[Z_i < -\beta_i] \quad (7)$$

5) 正規多重積分を用いた範囲推定

破壊事象 E_i が $E_i: \{\alpha_i\}^t U + \beta_i = Z_i + \beta_i = \lambda_i u + \sqrt{1 - \lambda_i^2} u_i + \beta_i \leq 0$ 、 $\{\alpha_i\}^t$:破壊モード E_i の方向余弦ベクトル、 U :正規標準確率変数ベクトル、 u_i, u, Z_i :正規標準確率変数、 β_i :安全性指標で表されると

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P[(Z_1 < \beta_1) \cap (Z_2 < \beta_2) \cap \dots \cap (Z_m < \beta_m)] \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P[(Z_1 < \beta_1) \cap (Z_2 < \beta_2) \cap \dots \cap (Z_m < \beta_m) | U=u] P(U=u) du \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^m \Phi\left(-\frac{\beta_i - \lambda_i u}{\sqrt{1 - \lambda_i^2}}\right) \right] \phi(u) du \end{aligned} \quad (8)$$

の関係式を用いると式(9)の範囲が得られる。¹⁾⁵⁾

$$P(F) \begin{cases} \geq 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^m \Phi\left(-\frac{\beta_i - \lambda_i^* u}{\sqrt{1 - \lambda_i^2}}\right) \right] \phi(u) du & \lambda_i^* = \sqrt{\min_j \{\rho_{ij}\}} \quad (i \neq j), \\ \leq 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^m \Phi\left(-\frac{\beta_i - \lambda_i^{**} u}{\sqrt{1 - \lambda_i^2}}\right) \right] \phi(u) du & \lambda_i^{**} = \sqrt{\max_j \{\rho_{ij}\}} \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (9)$$

となる。ここで、 $\phi(\cdot)$ は標準正規確率密度関数。

また、式(8)の $1-P(Z_1 < \beta_1) \cap (Z_2 < \beta_2) \cap \dots \cap (Z_m < \beta_m) | U=u]$ は、式(4)において、

$$\beta_j \text{ を } \frac{\beta_i - \lambda_{ij} u}{\sqrt{1 - \lambda_{ij}^2}} \quad , \quad \frac{\beta_i - \rho_{ij} \beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \text{ を } \frac{\beta_i u - \rho_{ij} \beta_j u}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \quad (10)$$

と置き換えることによっても確率の範囲が得られる。²⁾

3. 数値計算例²⁾

数値計算例として風荷重を受ける多層(m層)のフレーム構造(図-1)を用いる。ここで、風荷重 $H_1, \dots, H_m$ は全て同じ平均値 μ と標準偏差 σ を持つと共に、風荷重は相互に等しい相関係数 r を有する。また、風荷重 $H_1, \dots, H_m$ は正規分布に従うものとする。抵抗モーメントの値 R_i を定数とすると、仮想仕事の定理より破壊規準式 Z_i とモード i と j の相関係数は、

$$Z_i = R_i - \sum_{j=1}^m H_j \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \rho_{ij} = \frac{\{(m-j+1)[1+(m-j)r] + (m-j+1)(j-i)r\}}{\sqrt{(m-i+1)[1+(m-i)r](m-j+1)[1+(m-j)r]}} \quad (j < i) \quad (11)(12)$$

となる。ここで、全ての単一破壊モードの安全性指標が $\beta = 4$ となるように R_i を決め、 $m = 100$ のときに下10層に塑性ヒンジが生じた場合のシステム破壊確率を各提案式により求めたものを表-1に示す。表-1の列の数字は、本文中の式の番号を示しており、(3)+(4)は式(3)(4)を用いていることを示す。また、表に示したシステム破壊確率は $\Phi^{-1}[P(F)]$ の値で表示している。

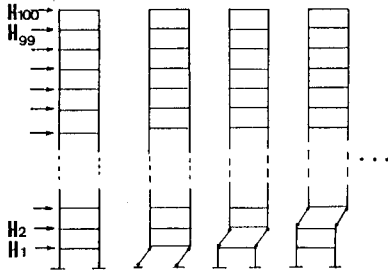


図-1²⁾
表-1

$\beta_i = 4.0$ for all bottom mode ($\mu/\sigma = 2$)							
Upper Bound on $Pr(\beta_i)$							
r	(2)	(3)+(4)	(3)+ 重積分	(10)	(7)	(9)	(5)+ 3重積分
0.0	3.147	3.544	3.774	3.81*	3.863	3.782	3.807
0.5	3.147	3.573	3.965	3.98*	3.998	3.972	3.976
0.8	3.147	3.575	3.982	3.99*	4.000	3.985	3.988
0.95	3.147	3.576	3.985		4.000	3.993	3.989
Lower Bound on $Pr(\beta_i)$							
r	(2)	(3)+(4)	(3)+ 重積分	(10)	(9)	(5)+ (6)	(5)+ 3重積分
0.0	4.000	3.965	3.963	3.90*	3.894	3.893+	3.910
0.5	4.000	3.996	3.996	3.99*	3.986	3.987+	3.992
0.8	4.000	3.998	3.998	4.00*	3.994	3.993+	3.996
0.95	4.000	3.999	3.998		3.995		3.993

*results of ref.2)
+results of ref.6)

4. 考察

式(3)や(5)の範囲は、ほとんどの場合良好な結果が得られたが、3次の範囲推定では3重積分(正規確率変数の場合は重積分となる)にかなりの計算時間を必要とするため実構造物への適用には問題がある。式(3)と(4)を用いた範囲はDitlevsen Boundsと呼ばれ式中に重積分が含まれないため計算時間が短くてすむが、モード間の相関が大きい場合その範囲は広がるためあまり実用的ではない。また、モード間の相関が大きな場合の範囲推定式として式(3)(10)を用いることをDitlevsenは提案しているが、Benettらは計算時間が少なく精度の良い式(3)を用いることを提案している。式(9)の方法は計算時間も短く実構造物解析の際の有効な手段と考えられるが、他の確率変数を正規化近似する際の精度も含めて検討する必要がある。参考文献 1)Bennett,R.M.and Ang,A.H-S.,Investigation of Methods for Structural System Reliability, Structural Research Series No.510,University of Illinois,Urbana,1983. 2)Ditlevsen

,O.,System Reliability Bounding by Conditioning, J. Eng. Mech.,ASCE,Vol.108,No.EM5,1982. 3)Ramachandran,K.and Baker,M.J.,New Reliability Bounds for Series Systems,4th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability-ICOSSAR'85,Japan,1985. 4)Vanmarcke,E.H.,Matrix Formulation of Reliability Analysis and Reliability-Based Design,Computers and Structures,Vol.3,No.4,1973. 5)Curnow,R.N.

and Dunnett,C.W.,The Numerical Evaluation of Certain Multivariate Normal Integrals,Annals of Mathematical Statistics,Vol.33,No.2,1962. 6)Bennett,R.M., Ang, A.H-S., Ramachandran, K.and Baker M.J.,Discussion of System Reliability Bounding by Conditioning,J. Eng. Mech.,ASCE,1984.