I-263　離散化近似法による信頼性解析について

金沢大学　工学部　　正会員　近田康夫
金沢大学　工学部　　正会員　小堀為雄

1　はじめに

構造物の信頼性解析においては，取り扱う確率変数の変動巾が大きい場合や，対象とする系の非線型応答までも含めた範囲で考える場合には，乱数を利用するモンテカルロ法が汎用的手法として採用される。本報告では，静的な解析で且つ結果が試行の順序に依存しない場合に対しては，モンテカルロ法のように乱数を用いることなく応答の期待値や分散，あるいは超過確率を求めることのできる一つの考え方を提案するとともに，若干の計算例を示すものである。

2　離散化近似法

まず，図1のような2つの入力確率変数X，Yと，確定的に与えられた関数$G(X,Y)$そして応答$Z=G(X,Y)$より成る系を考える。いま，入力X，Yがそれぞれ3つの値より成る離散型の確率変数であるとすると，応答Z はXi，Yj $(i,j=1,2,3)$ の組み合わせにより9つの実現値よりなる確率変数となる。X，Yが互いに独立であるとすると，応答Z の期待値 E〔Z〕，および分散 VAR〔Z〕はそれぞれ，

$$E[Z] = \sum_i \sum_j G(Xi,Yj) PX_i \cdot PY_j \qquad (1)$$

$$VAR[Z] = \sum_i \sum_j G(Xi,YJ)^2 PX_i \cdot PY_j - (E[Z])^2 \quad (i,j=1,2,3) \qquad (2)$$

となる。ただし，PX_i，PY_j はそれぞれ，Xi,Yjの生起確率である。

すなわち，入力変数の実現値の組み合わせに対応した応答値を一度計算すればよいことになる。

また，Z の，ある値ZFに対する超過確率も，次式により計算される。

$$\mathrm{Prob}(Z \geq ZF) = \sum_{Z>ZF} \sum PX_i \, PY_j \qquad (3)$$

この問題をモンテカルロ法を用いて解く場合には，応答の9つの実現値を入力変数の生起確率に比例して何回も同一の計算を行うことになり，極めて不経済なものとなる。

入力変数が連続型の確率変数の場合にも，上述した離散型確率変数の取扱の簡便さを取り入れようとするのが以下に示す離散化近似法である。

入力変数X，Yが確率密度関数$fx(x)$，$fy(y)$を有する互いに独立な連続型確率変数であるとき，これを，次式に示すようにN 個の点で離散化近似する。

$$\left.\begin{array}{l} X: fx(x) \longrightarrow X^* : PX_i = fx(xi) / \sum_k fx(x_k) \\ Y: fy(y) \longrightarrow Y^* : PY_i = fy(yi) / \sum_k fy(y_k) \quad , k = 1,\cdots,N \end{array}\right\} \qquad (4)$$

ただし，＊は離散化された変数を表している。このとき，PX_i, $i=1$ ～N は X^* の確率質量関数となっており $fx(x)$ とは次元が異なることに注意する必要がある。また，当然ながら，$\sum PX_i=1$，$\sum PY_j=1$が満足されている。応答Zの確率密度関数もまた離散化され，次式の確率質量関数となる。

$$Z^* : PZ_{ij} = PX_i \cdot PY_j \ , \ \sum\sum PX_i \cdot PY_j = \sum\sum PZ_{ij} = 1 \qquad (5)$$

これ以降は，式(1)～(3)を用いれば良い。

このようにして，Z の期待値や分散も Z^* を用いてその近似値をモンテカルロ法を採用した場合よりも，遥かに少ない計算量で求めることができる。この離散化近似法を用いる場合には，入力変数に対する離散化をどの位の範囲を何点で行えば良いかということが最も重要な検討事項となる。

3 計算例

文献[1]の信頼性解析例に本手法の適用を試みる。図２の不静定梁の最大曲げモーメントに関する性能関数Zおよび，入力変数の分布は，以下のようである。

$$Z = Z(X_1 + X_2 + X_3) = X_1 - 49\, X_2\, X_3^2 \,/512 \tag{6}$$

ここに，X_1:極限曲げモーメント，LN(50tf/m,5.0tf/m)，X_2:作用荷重，LN(2.0tf/m,1.0tf/m)，X_3:支間長，N(10.0M,0.3M)，1tf=9.8kN，N(μ，σ)，LN(μ，σ) はそれぞれ，正規分布，対数正規分布を表す。

離散化は各入力変数を区間〔$\mu - k\sigma$，$\mu + k\sigma$〕，k=3，4，5，6，7および8 においてそれぞれ 6，8，10，12，14，16等分点に離散化した。したがって，それぞれ 7，9，11，13，15 および17の離散点ということになる。また，比較の意味で，$\mu \pm 5\sigma$の区間を20等分した場合（21離散点）についても計算を行う。

なお，この計算とは別に，正規分布，対数正規分布，極値分布(Type Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）に対して，どの程度の離散化でもとの分布の平均値と分散あるいは，それに代わるパラメータを充分な精度で表現できるのかを調べた結果，対称な分布では$\mu \pm 3\sigma$を７点，非対称分布でも$\mu \pm 5\sigma$を11点で離散化すれば充分であることを確認している。

解析結果を表1 に示す。$\mu \pm 5\sigma$の範囲を11点で離散化近似すれば，ほぼ正解が得られることがわかる。また，$\mu \pm 5\sigma$の範囲を11点および21点で離散化した結果はほとんど変わらない点が注目される。計算の効率を考えると，$\mu \pm 5\sigma$の範囲を11点で離散化近似した場合には，11^3=1331回の乗算で，$\mu + 5\sigma$の範囲を21点で離散化近似した場合でも，21^3=9261回の乗算で済むことになる。入力変数の分布形の裾野部分のデータの不確実性を考慮すれば，この程度の精度でも工学的には充分ではないかと考えられる。

また，離散化を行う範囲と点数は，入力変数が多くなるにつれて１つの組み合わせに対応する応答の生起確率は小さくなることから区間$\mu \pm 3\sigma$〜$\mu \pm 5\sigma$をσで等分すれば充分と考えられる。

4 おわりに

ここで提案した手法は，有限要素法による弾塑性応答解析において信頼性をも検討するような場合に最も効果的なものと考えられる。今後，具体的な問題に適用を試みる予定である。

5 参考文献

1)星谷，石井：構造物の信頼性解析，pp.91-92，鹿島出版会，1986

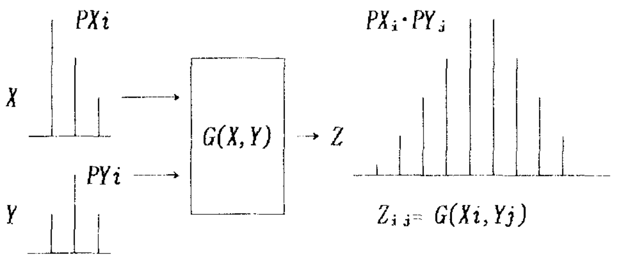

図1 離散型応答の概念図

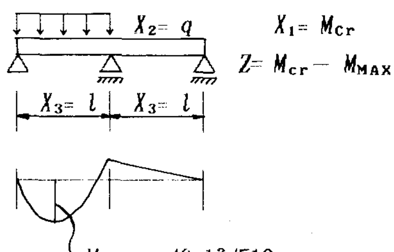

図2 不静定梁[1]

表1　解析結果の比較

	ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法 20000 回	$\mu \pm 3\sigma$ 7点	$\mu \pm 4\sigma$ 9点	$\mu \pm 5\sigma$ 11 点	$\mu \pm 6\sigma$ 13 点	$\mu \pm 7\sigma$ 15 点	$\mu \pm 8\sigma$ 17 点	$\mu \pm 5\sigma$ 21 点
$\beta = \mu_Z\ \sigma_Z$	2.86	3.09	2.97	2.91	2.88	2.86	2.85	2.92
Prob(Z≦0)	0.01335	0.0073	0.0117	0.0135	0.0142	0.0144	0.0145	0.0127