土木学会第42回年次学術講演会（昭和62年９月）

I-262　共分散行列を確実に満たす確率ベクトルのシミュレーション法

清水建設大崎研究室　正会員　○ 山崎文雄
コロンビア大学　正会員　篠塚正宣

1.はじめに　ランダム過程のシミュレーションは、従来より不規則振動問題等e.g.[1]に広く利用されてきたが、近年、確率有限要素法における材料特性等の空間的変動[2]の表現法としても利用が広まっている。ここで、このような問題にモンテカルロ法を適用する場合、安定した統計量を得るには一般に多くのサンプル数を要するという難点が指摘されている。ここでは、離散化した多次元ランダム過程(確率ベクトル)の統計量(期待値、共分散行列)を少ないサンプル数で高精度にシミュレートする手法[3]を開発したので概述する。

2.共分散行列のモード分解　確率ベクトル$\mathbf{X}=[X_1 X_2 \cdots X_N]^T$の与条件として、期待値$E[\mathbf{X}]=0$と自己相関関数より定まる共分散行列$\mathbf{C}_{XX}$が与えられたとする。このXの具体例として100個の要素から成る有限要素モデルにおける規準化された弾性係数を取り上げると、目的とする$\mathbf{C}_{XX}$は、図-1のようになる。この$\mathbf{C}_{XX}$をモード分解すると、固有モード行列$\mathbf{\Phi}_X$と対角固有値行列$\mathbf{\Lambda}_X$が得られる。

$$\mathbf{C}_{XX}\mathbf{\Phi}_X = \mathbf{\Phi}_X \mathbf{\Lambda}_X \quad ; \quad \mathbf{\Phi}_X^T \mathbf{\Phi}_X = \mathbf{I} \qquad \text{.............. (1)}$$

これより各成分が相関を持ったXのサンプルは、各成分が相関の無いサンプルベクトル$\mathbf{Z}=[Z_1 Z_2 \cdots Z_N]^T$と$\mathbf{\Phi}_X$を用いて$\mathbf{X}=\mathbf{\Phi}_X\mathbf{Z}$により生成される。ここでZは、期待値$E[\mathbf{Z}]=0$及び共分散行列$\mathbf{C}_{ZZ}=\mathbf{\Lambda}_X$を満たすような確率ベクトルである。単純なZの生成法は、N個の正規乱数を繰り返しサンプリングすることであるが、目的の統計量(期待値、共分散行列)がほぼ満たされるまでには、数多くのサンプル数を必要とする。

3.統計的前規定法 (Statistical Preconditioning)　新たな方法では、各々のZ_iをサンプル数軸に関する1次元ランダム過程とみなし、次の三角級数で表現する。

$$Z_i(j)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N_f}\sqrt{\frac{\lambda_i}{N_f}}\cos(\omega_k^{(i)} j\Delta t+\psi_k^{(i)}) \qquad (j=1,2,..,N_s) \qquad \text{.............. (2)}$$

ここでλ_iはi次固有値($\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_N$)、$\psi_k^{(i)}$はランダム位相角、$N_f$は重ね合わせる周波数の数で正規分布への近似度を規定する。もし周波数$\omega_k^{(i)}$と刻みΔtを適当に与えれば、Zのサンプル数$N_s=2N_f N$に関する統計量(期待値、共分散行列)は三角級数の直交性により、完全に満たされる[3]。更に、高次の固有値が急激に減少する性質を考慮し、サンプル数を$N_s=2N_f M$に減らすため、(M+1)次以上の高次モードを無視する。

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}_X \mathbf{Z} \approx [\,\mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_2 \cdots \mathbf{\Phi}_M\,][\,Z_1 Z_2 \cdots Z_M\,]^T \qquad \text{.............. (3)}$$

こうしてXの各成分は最終的に(4)式でシミュレートされ、中心極限定理により正規分布に漸近する。

$$X_s(j)=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_f}\phi_{si}\sqrt{\frac{\lambda_i}{N_f}}\cos(\omega_k^{(i)} j\Delta t+\psi_{ks}^{(i)}) \qquad (s=1,2,..,N\,;\,j=1,2,..,N_s) \qquad \text{...... (4)}$$

図-1の$\mathbf{C}_{XX}$をターゲットとして本手法及びランダムサンプリングによるXのシミュレーションを行った。サンプル関数の例を図-2に、サンプル数100でのシミュレーションによる共分散行列を図-3,4に示す。また、有限要素モデルの対角線に関する共分散を図-5に、X_{45}の累積確率分布を正規確率紙上に(図-6)に示す。これらより本手法が、非常に精度良く目的とする統計量を満たし、また分布形も良いことが分かる。

[1] Shinozuka, "Monte Carlo Simulation of Structural Dynamics," Int. Jour. of Computers and Structures, Vol. 2, 1972, pp. 855-874.
[2] Yamazaki and Shinozuka, "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems," 第7回日本地震工学シンポジウム, pp.1447-1452, Dec., 1986.
[3] Yamazaki and Shinozuka "Simulation of Stochastic Fields by Statistical Preconditioning," Technical Report, Dept. of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia Univ., May, 1986.

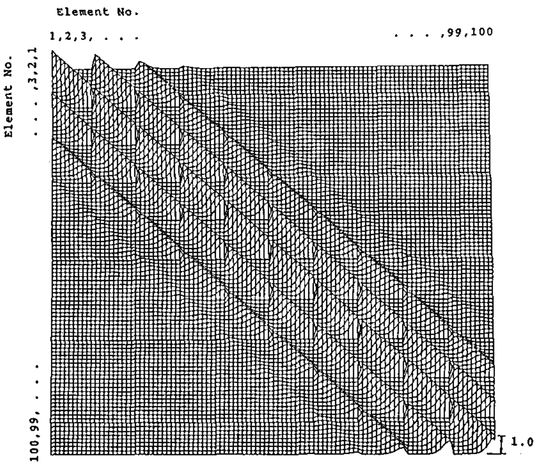

図-1　ターゲットの共分散行列 $\mathbf{C}_{XX}$

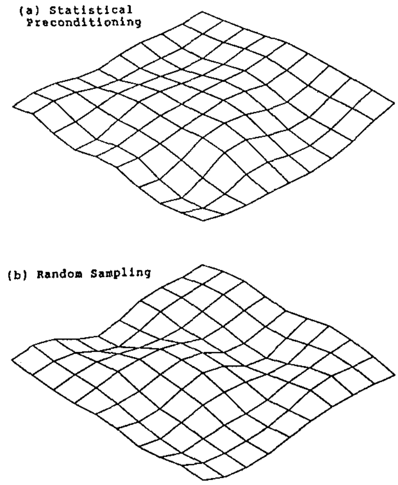

図-2　シミュレーションによるサンプル関数

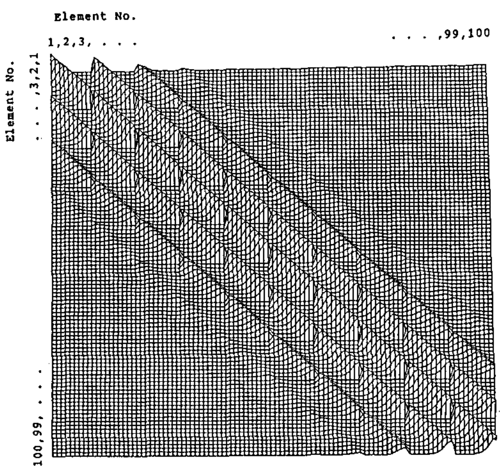

図-3　本手法による共分散行列 $\mathbf{C}_{XX}$

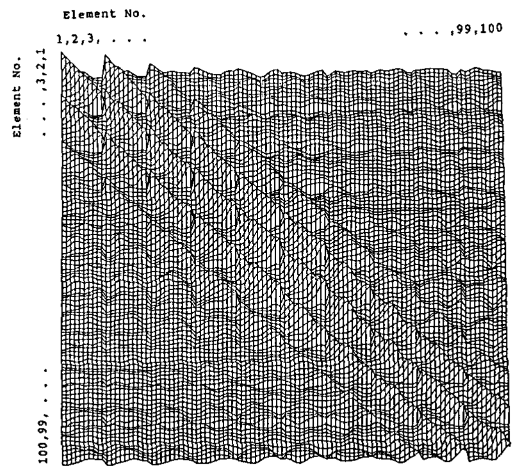

図-4　ランダムサンプリングによる共分散行列 $\mathbf{C}_{XX}$

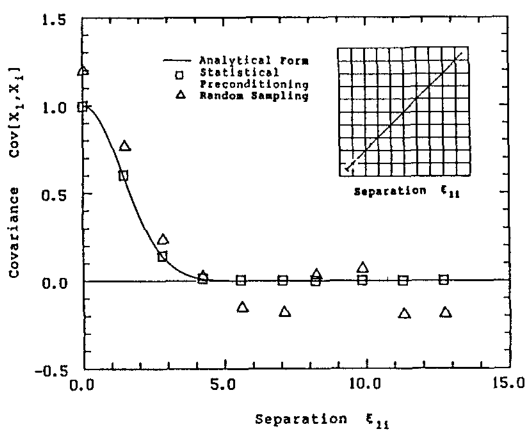

図-5　共分散 $Cov(X_1, X_i)$ の精度の比較

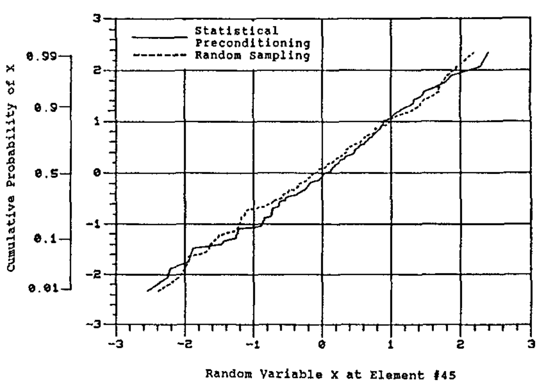

図-6　X_{45}の累積確率分布の比較（正規確率紙）