# I-257　立体トラスの形状最適化のための感度解析

八戸工業大学　正会員　長谷川　明

## 1．はじめに

トラス構造物の最適化には、１）与えられた形状のもとで各部材断面を最適化する断面の最適化と、２）節点座標をも設計変数に取り入れた形状の最適化がある。後者は前者で扱われる設計変数をも含んでいることから、最適化問題としては大規模となるものの、前者に比較して得られる解の改善は、より優れていると考えられる。

本論は、立体トラス構造の形状最適化を行なう際に必要とされる感度係数を解析的に求めたもので、立体トラスの形状最適化に有効に利用されるものと考えている。

## 2．感度解析

ここでは、設計変数Ｘとして、トラスの節点座標（Xi,Yi,Zi）および部材断面積Ａｉを取り上げる。制約条件として応力、変位を考え、トラスに使用される部材の全体積（Ｚ＝ΣＡｉＬｉ）を最小化することが最適であると考えた。

この解を求めるには、応力σ、変位δ、および目的関数Ｚの各設計変数による感度係数が必要である。

トラスの構造解析は（１）の剛性方程式より、変位ベクトル｛Ｕ｝を求め、（２）式から要素変位ベクトル｛Ue｝を使って応力｛σ｝を求める手順によって行なわれる。

$$\{F\} = [K]\{U\} \qquad (1)$$

$$\{\sigma\} = (1/A_i)[T_e][K_e]\{U_e\} \qquad (2)$$

ここで、｛Ｆ｝：外力ベクトル
［Ｋ ］：全体剛性マトリックス

なお、要素剛性マトリックス［Ke］と 座標変換マトリックス［Te］は（３）、（４）式で表現されている。

$$[K_e] = \frac{A_i E_i}{L_i}\begin{bmatrix} \lambda x\lambda x & \lambda x\lambda y & \lambda x\lambda z & -\lambda x\lambda x & -\lambda x\lambda y & -\lambda x\lambda z \\ & \lambda y\lambda y & \lambda y\lambda z & -\lambda x\lambda y & -\lambda y\lambda y & -\lambda y\lambda z \\ & & \lambda z\lambda z & -\lambda x\lambda z & -\lambda y\lambda z & -\lambda z\lambda z \\ & & & \lambda x\lambda x & \lambda x\lambda y & \lambda x\lambda z \\ & \mathrm{Sym.} & & & \lambda y\lambda y & \lambda y\lambda z \\ & & & & & \lambda z\lambda z \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ここで
$\lambda x=(Xi-Xj)/\ Li$
$\lambda y=(Yi-Yj)/\ Li$
$\lambda z=(Zi-Zj)/\ Li$
（Xi,Yi,Zi），（Xj,Yj,Zj）はそれぞれ部材端の始点および終点の節点座標
Ｌｉは部材長

$$[T_e] = \begin{bmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

さて、（１）、（２）式を設計変数Ｘで微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial\{U\}}{\partial X} = -[K]^{-1}\frac{\partial[K]}{\partial X}\{U\} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial X} = \frac{\partial(1/A_i)}{\partial X}[T_e][K_e]\{U_e\} + \frac{1}{A_i}\frac{\partial[T_e]}{\partial X}[K_e]\{U_e\} + \frac{1}{A_i}[T_e]\frac{\partial[K_e]}{\partial X}\{U_e\} + \frac{1}{A_i}[T_e][K_e]\frac{\partial\{U_e\}}{\partial X} \qquad (6)$$

となり、これらの中で最適化の前に行なわれる構造解析で計算されていないのは、$\frac{\partial[K]}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A_i}\right)$, $\frac{\partial[Te]}{\partial x}$ であるから、これらを求めれば、感度係数が得られる。

1）$\frac{\partial[K]}{\partial x}$ について

剛性マトリックス［K］は式（3）に示す要素剛性マトリックス［Ke］の重ね合わせによって作成されるものであるから、$\frac{\partial[K]}{\partial x}$ は $\frac{\partial[Ke]}{\partial x}$ の重ね合わせによって求められる。部材長Ｌｉも節点座標の関数であることに注意して（3）式を節点座標で微分すると、例えば節点座標Xiによる微分は次のようになる。なお、式（7）は［Ke］の左上３＊３マトリックス部分の微係数である。

$$\frac{\partial\ [Ke^{3*3}]}{\partial\ Xi} = \frac{AiEi}{Li^2}\begin{bmatrix} 3\lambda x^3-2\lambda x & 3\lambda x^2\lambda y-\lambda y & 3\lambda x^2\lambda z-\lambda z \\ & 3\lambda x\lambda y^2 & 3\lambda x\lambda y\lambda z \\ \mathrm{Sym.} & & 3\lambda x\lambda z^2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

また、全節点座標について微係数を求めると次のことがわかる。

$$\frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Xj} = -\frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Xi} \qquad \frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Yj} = -\frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Yi} \qquad \frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Zj} = -\frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Zi} \tag{8}$$

一方、設計変数が断面積である時は、λx, λy, λZ が断面積と関係がないことを考慮すると（9）となる。

$$\frac{\partial\ [Ke]}{\partial\ Ai} = \frac{[Ke]}{Ai} \tag{9}$$

2）$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A_i}\right)$ について

これは設計変数が同じ部材の断面積である時に限り、$-1/Ai^2$となり、それ以外の時は０となる。

3）$\frac{\partial[Te]}{\partial x}$ について

座標変換マトリックス［Te］は 式（4）に示されるように、断面積を含まないため、設計変数が節点座標の時に限り、微係数を計算する必要がある。式（１０）は節点座標Xiで微分した例である。

$$\frac{\partial\ [Te]}{\partial\ Xi} = \frac{1}{Li}\begin{bmatrix} -1+\lambda x^2 & \lambda x\lambda y & \lambda x\lambda z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda x^2 & \lambda x\lambda y & \lambda x\lambda z \end{bmatrix} \tag{10}$$

4）$\frac{\partial Z}{\partial x}$ について

目的関数Ｚを節点座標、断面積で微分するとそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial Z}{\partial A_i} = L_i \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial X_i} = \sum_j A_j \frac{\partial L_j}{\partial X_i} = \sum A_j(\pm\lambda_x) \tag{11}$$

＋はXiがＬｊの終点の時
－はXiがＬｊの始点の時

## 3．おわりに

このようにして立体トラスの形状最適化で用いられる感度係数が解析的に計算されることとなった。今後はこの係数を利用して、従来あまり検討されていない立体トラスの形状最適化について研究を進めたいと考えている。なお、ここで示した感度係数はそのまま２次元平面トラスでも利用できるものである。

＜参考文献＞

１）小堀為雄、吉田博：有限要素法による構造解析プログラム、丸善
２）M.P.Saka:Shape Optimization of Trusses,ASCE vol.106,No.ST5,May,1980