

東京電機大 理工学部 松井 邦人

1 はじめに 滑走路や道路のような舗装構造は(図1), 繰り返し受ける加重作用のため, 徐々に舗装体内部の損傷が進行し, 全体的な剛性が低下する。著者は多層構造体の表面変位が既知であるとして, ニュートンラプソン法と最小2乗法を併用した手法を用いて, このような逆解析問題を解ける事を示した。本研究では同様の問題の解法として, 2次計画問題への定式化を示している。

2 逆解析問題の定義 表面での測定変位を d_i , その点での解析値を Z_i とすると, 通常測定値が解析値に一致することを期待し, 測定点が M 個であるとして,

$$\min f = \sum_{i=1}^M (Z_i - d_i)^2$$

となるように, 弾性係数 $E_j (j=1 \sim N)$ を決定しようと試みる。しかしDFP法やその他非線形最適化手法を用いても, 一般に最下層は目標値に収束するが上層の収束性は非常に悪いのが実状である。

測点 i の変位 Z_i は E_j の関数である。 $Z_i(E_j + \delta E_j)$ と $Z_i(E_j)$ の関係は近似適に

$$Z_i(E_j + \delta E_j) = Z_i(E_j) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial E_j} \delta E_j \quad (1)$$

と表せる。最適化手法を利用する際, 解析に使用する変数(解析変数)と最適化過程で使用する変数(最適化変数)と区別するのが便利である。今最適化変数を X_j とすると式①は

$$Z_i(X_j + \delta X_j) = Z_i(X_j) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Z_i}{\partial X_j} \delta X_j \quad (2)$$

と表せる。 X_j を推定するとき, $Z_i(X_j)$ は一般に測定変位 d_i と異なったものになるであろう。そのためには X_j を順次補正する必要がある。式②の δX_j が必要な補正量であるとして, その決定は以下の最適化問題を解くことにより求めることができる。

$$\min \sum_{j=1}^N (\delta X_j)^2 + \sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} \delta X_j + Z_i - d_i + \varepsilon_i = 0 \quad (4)$$

$$\delta X_j - C_1 X_j < 0 \quad (5)$$

$$-\delta X_j - C_2 X_j < 0 \quad (6)$$

但し $a_{ij} = \partial Z_i / \partial X_j$. 式④の ε_i は測定誤差であり式⑤, ⑥は δX_j の上限, 下限に関する制約条件であ

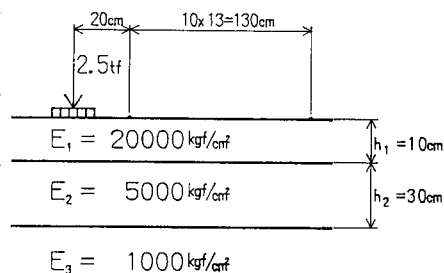


図1 弾性多層構造体のモデル

る。

式③～⑥で定義される問題は変数を $\delta X_j, \varepsilon_i$ とする2次計画問題である。SLP法等を用いて解くことができるが, ここでは以下のようにして解いている。

3 問題の解法 式③～⑥で定義される最適化問題の解は, ラグランジェ関数 L

$$\begin{aligned} L = & \sum_{j=1}^N (\delta X_j)^2 + \sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 \\ & + \sum_{i=1}^M \mu_i (a_{ij} \delta X_j + \varepsilon_i + Z_i - d_i) \\ & + \sum_{j=1}^N \rho_j (\delta X_j - C_1 X_j) + \sum_{j=1}^N \gamma_j (-\delta X_j - C_2 X_j) \end{aligned} \quad (7)$$

として, 以下のKuhn-Tucker 必要条件を満たさなければならない。

$$\frac{\partial L}{\partial \delta X_j} = 2\delta X_j + \sum_{i=1}^M \mu_i a_{ij} + \rho_j - \gamma_j = 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_i} = 2\varepsilon_i + \mu_i = 0 \quad (i=1 \sim M) \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \delta X_j + \varepsilon_i + Z_i - d_i = 0 \quad (i=1 \sim M) \quad (10)$$

$$\rho_j (\delta X_j - C_1 X_j) = 0 \quad (11)$$

$$\gamma_j (-\delta X_j - C_2 X_j) = 0 \quad (12)$$

但し $\mu_i \neq 0, \rho_j \geq 0, \gamma_j \geq 0$ はラグランジェ乗数である。

今 $\rho_j = 0, \gamma_j = 0, (j=1 \sim N)$ とする。式⑧より

$$\delta X_j = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mu_i a_{ij} \quad (j=1 \sim N) \quad (13)$$

また 式⑨より

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{2}\mu_i \quad (i=1 \sim M) \quad (14)$$

式⑬, ⑭を式⑩に代入して整理すると,

$$\sum_{j=1}^M \left\{ \left(\sum_{i=1}^N a_{ij} d_{ij} \right) + \delta_{ij} \mu_i \right\} \mu_j = 2(Z_i - d_i) \quad (15) \\ (i=1 \sim M)$$

式⑮は μ_i に関して $M \times M$ の連立方程式である。これより μ_i を求め、式⑬, ⑭に代入すると $\delta X_j, \varepsilon_i$ が求まる。この様にして求めた δX_j のうち式⑤を満足しない添字集合をA, 式⑥を満足しない集合をBとする。即ち

$$A = \{j | \delta X_j - C_1 X_j > 0\} \quad (16) \\ B = \{j | \delta X_j + C_2 X_j > 0\}$$

また集合AとBは互いに排反集合である。A, Bが空集合でない場合、即ち $\forall k > 0, k \in A \quad \forall j = 0, j \in A$
 $\forall j > 0, j \in B \quad \forall j = 0, j \in B$ であるとき(A, BはそれぞれA, Bの補集合), 式⑧より

$$2\delta X_j + \sum_{i=1}^M \mu_i a_{ij} = 0, \quad (j \in A \cup B) \quad (17)$$

$$2\delta X_k + \sum_{i=1}^M \mu_i a_{ik} + \gamma_k = 0, \quad (k \in A) \quad (18)$$

$$2\delta X_l + \sum_{i=1}^M \mu_i a_{il} - \gamma_l = 0, \quad (l \in B) \quad (19)$$

但し $A \cup B$ はA, Bの和集合の補集合を意味している。式⑩より

$$\left\{ \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j \in A \cup B} a_{ij} d_{ij} \right) + \delta_{im} \mu_m \right\} \mu_m \\ = 2(Z_i - d_i + C_1 \sum_{k \in A} a_{ik} X_k - C_2 \sum_{j \in B} a_{ij} X_j) \quad (20)$$

式⑳は μ_m に関する $M \times M$ の連立方程式であり、 μ_m について解くことができる。更に式⑬, ⑭より δX_j ($j \in A \cup B$), ε_i ($i=1 \sim M$)を求める。以上のアルゴリズムを整理すると以下になる。

Step 1 X_j ($j=1 \sim M$)を推定, Z_i ($i=1 \sim M$)及び $\delta Z_i / \delta X_j$ を計算する。

Step 2 式⑮より μ_i 式⑬, ⑭より $\delta X_j, \varepsilon_i$ を計算する。

Step 3 式⑮により, 添字集合A, Bを求める。

Step 4 A, Bが空集合でない場合, 式⑳より μ_m を再計算し, δX_j ($j \in A \cup B$)を求める。 δX_j が不等号制約条件を満足しないときその添字をA, Bに追加し, μ_m を計算し直す。

Step 5 $X_j = X_j + \delta X_j$ を求める。

Step 6 $\sum_{j=1}^N (\delta X_j)^2 + \sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 < \eta$ (η は十分小さい正数)なら計算を打ち切る。そうでない場合にはStep 1に戻る。

4 計算結果 図1のような3層モデルの逆解析を行った。正しい弾性係数は図に示した通りである。初期値として $E_1=30000 \text{ kgf/cm}^2$, $E_2=6000 \text{ kgf/cm}^2$, $E_3=2000 \text{ kgf/cm}^2$ を用いている。また全ての層のポアソン比は0.35を使用した。最適化変数として $X_j=1/E_j$ を使用している。荷重の作用点より20, 30, 40cmの位置で測定したものとして、逆解析を行っている。本方法を用いた結果を表1, また文献¹⁾で得られた結果を表2に示す。本方法の結果は繰り返し回数が多くなっているが、最適解の近傍で安定した収束性を示している。

表1

l tr	E1	E2	E3	f
0	3.000E+04	6.000E+03	2.000E+03	
1	6.000E+04	4.000E+03	1.333E+03	1.944E-05
2	5.162E+04	3.812E+03	1.038E+03	6.042E-08
3	3.821E+04	4.626E+03	9.968E+02	7.552E-09
4	2.594E+04	5.016E+03	9.890E+02	7.008E-10
5	2.127E+04	4.990E+03	9.981E+02	1.693E-10
6	2.035E+04	4.989E+03	9.997E+02	9.012E-12
7	2.011E+04	4.996E+03	9.999E+02	6.824E-13
8	2.004E+04	4.999E+03	1.000E+03	7.562E-14
9	2.001E+04	5.000E+03	1.000E+03	9.149E-15
10	2.000E+04	5.000E+03	1.000E+03	1.041E-15
11	2.000E+04	5.000E+03	1.000E+03	1.184E-16

表2

l tr	E1	E2	E3	f
0	3.000E+04	6.000E+03	2.000E+03	
1	1.500E+04	5.142E+03	1.000E+03	1.423E-04
2	2.241E+04	4.908E+03	9.912E+02	4.142E-08
3	1.986E+04	5.006E+03	9.995E+02	2.293E-08
4	2.002E+04	4.999E+03	1.000E+03	1.515E-10
5	1.999E+04	5.000E+03	1.000E+03	1.319E-13
6	2.000E+04	5.000E+03	1.000E+03	2.803E-15

謝辞 数値解析及びワープロの作業は、卒研究生 渡辺正幸君(現 日本IBM㈱)の助力によるものである。ここに謝意を表する。

参考文献 松井邦人, 渡辺正幸: 弾性多層構造体の逆問題解析の検討, 第14回関東支部技術発表会講演概要集(1-4) 昭和62年4月