I-252　有限要素法による弾性体の形状最適化

京都大学工学部　正員　田村　武
同　正員　小林昭一
宇部興産　正員　山根　剛

1．はじめに

構造物の形状最適化については種々の研究がなされているが，多くは適当な目的関数をある制約条件のもとで直接に最小（大）化する，いわゆる数理計画法に基づくものである．　しかし，構造物を線形弾性と仮定し，また目的関数としてコンプライアンス，あるいは外力の作用によるひずみエネルギー吸収量とするとき，変分法を用いることによって力学的に意味のある必要条件を導くことができる．　ここでは，Banichuk らによって提案された「形状変化を考慮した変分法」を適用することにより，この必要条件を求めたあと，有限要素法による形状最適化の手法を考える．　また，簡単な例題により，本法の有効性を検証する．

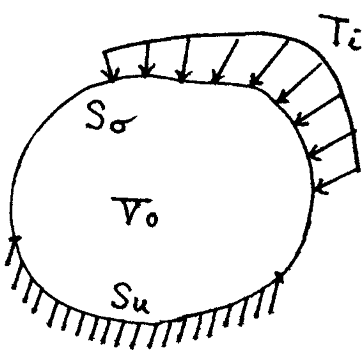
2．問題の設定

線形弾性体と仮定した構造物の表面の一部（$S\sigma$）に与えられた力（T_i）が作用している（図－1）．　このとき，全体の体積を一定（V_o）としたうえで，外力仕事W：

$$W = \frac{1}{2}\int_{S\sigma} T_i u_i \, dS \qquad (1)$$

を最小にするような表面$S\sigma$の形状を求める．　よく知られているように，弾性体のつりあい条件は，次の全ポテンシャルエネルギーΠを変位u_iについて最小にすることと等価である．

$$\Pi = \int \frac{1}{2} D_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} \, dV - 2W \qquad (2)$$



図－1

ここに，D_{ijkl}は弾性係数，「，」は微分をそれぞれ表している．　以下，第１項の被積分関数であるひずみエネルギー（密度）をE　で示す．　さて，Πを最小にするu_i（正解）において，Πは$-W$に等しいことより，W　を最小にするには

$$\underset{S\sigma}{\mathrm{Max}}\ \min \Pi[u_i, S\sigma] \qquad \mathrm{sub.\ to}\ \ V = V_o$$

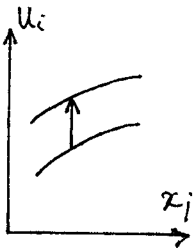
なる最適化問題を考えればよいことになる．　すなわち，u_iについて最小化して，系のつりあい条件を満たしながら，一方で，制約条件　$V=V_o$のもとで表面$S\sigma$の形状を変化させながら，最大化すればよい．

3．形状の変化を考慮した変分法

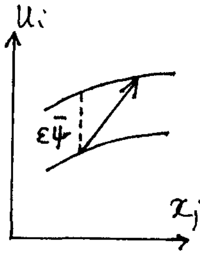
従来の変分法では，未知関数（ここでは変位u_i）に式（3）のような変分を与えるが，これを拡張して，独立変数である座標x_iにも式（4）のように変分をもたせることができる．

$$u_i^* = u_i(x_j) + \varepsilon \psi_i(x_j) \qquad (3)$$

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \phi_i(x_j) \qquad (4)$$



図－2



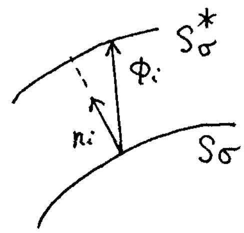
図－3

これは，前者が図－２のように，関数のグラフ上の点を上下のみに

移動させていたのに対し，後者では図—３のように上下，左右に移動させることになる．　さて，式（3），（4）の変分についてΠ　の第１変分を求めてみると次のようになる．

$$\delta \Pi = \varepsilon \int (D_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \bar{\psi}_i dV + \varepsilon \int_{S\sigma} \{ (D_{ijkl} u_{k,l}) n_j - T_i \} \bar{\psi}_i dS + \varepsilon \int_{S\sigma} E \phi_i n_i dS \quad (5)$$

ここに，$\bar{\varphi}_i$ は図—３に示すように点 x_i を固定して見たときの変分である．　従来の変分法とまったく同じように式（5）の第1，２項より，オイラーの方程式（最大，最小化の必要条件）として①領域内部のつりあい条件と，②表面Ｓσでのつりあい条件が得られる．　他方，x_i の変分を含む第３項の n_i は法線を表すが，$\phi_i n_i$ は表面Ｓσにおける「膨らみ（図—４）」と見ることができる．
形状変化に関する制約条件である等体積条件は



図—４

$$\int_{S\sigma} \phi_i n_i dS = 0 \quad (6)$$

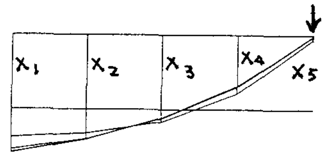
と書ける．　式（6）を満たす任意の形状変化　$\phi_i n_i$　に対して，式（5）の第３項がつねにゼロであるためには

$$E = \lambda \ (\text{一定}) \quad \text{on } S_\sigma \quad (7)$$

でなければならない．　これが形状最適化のための必要条件である．　つまり，外力による仕事を最小にするような形状においては，その表面Ｓσにおいて，ひずみエネルギーＥ　が一定値とならなければならないことを式（7）は意味している．

４．数値計算例

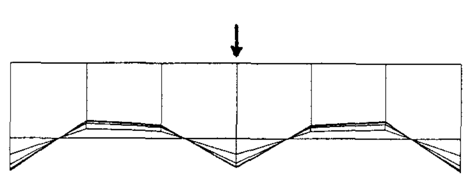
簡単な例として，片持ちばりをとり上げる（図—５）．先端に作用する荷重Ｐによる仕事が最小になるような下縁の形状を求める．　この場合，先端の沈下量を最小にする問題となる．　はりを４つの要素に分け，下縁の節点の鉛直座標のみ変化させる．　ここで，式（7）の基づく形状最適化は有限要素法を用いているが，その方法は文献２）と同じである．　なお，はり理論によれば，この問題の最適解は，曲げモーメントの平方根に比例するような形状であることが容易にわかる．　図—５には，収束過程におけるはりの形状（５回毎）を示している．　表—１には，はり理論による解との比較を記した．　これらからわかるように，この手法による結果はかなり妥当なものと考えられる．　図—６は，両端固定のはりの中央に集中荷重をさせた場合の収束過程である．　やはり，曲げモーメントの大きな部分で断面を大きくするような形状に収束している．
なお，収束回数はいずれも１０数回程度であった．



図—５

	FEM解析	理論値
X_1	1.5854	1.500
X_2	1.4047	1.299
X_3	1.1135	1.061
X_4	0.6829	0.750
X_5	0.0113	0.0

表—１


図—６

参考文献

1）N. V. Basnichuk ：Problems and Methods of Optimal Structural Sesign, Plenum Press, 1983.
2）田村，小林，中山：断面形状の最適化に関する一考察，第41回土木学会年次講演会， I -126,1986.
3）山根　剛：有限要素法による弾性体の形状最適化，京都大学工学部土木工学科特別研究，1987.