

国土館大学 工学部 正員 菊田 征勇
 東京電機大学 理工学部 正員 松井 邦人
 東洋大学 工学部 正員 新延 泰生

1. まえがき 近年、構造設計において、動的解析による照査が要求されることが多くなってきている。このような設計変更には、動的感度解析手法が有効である。しかし、構造物が大型化してくると、有限要素法を用いた離散系で定式化した運動方程式は、数百から数千の自由度を有することがしばしばあり、それを解くための計算コストは相当なものとなるので、計算効率を図ることが重要である。

2. 動的感度解析の定式化 動的外力を受ける線系多自由度の運動方程式は、一般にマトリックス表示を用いて次の様に表すことが出来る。

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\dot{\mathbf{z}} + K\mathbf{z} = \mathbf{Q}(\mathbf{b}, t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \dot{\mathbf{z}}_0 \quad (1)$$

ここに、 M , C , K は $n \times n$ の質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスであり、正値対称マトリックスである。 $\mathbf{z}$, $\dot{\mathbf{z}}$, $\ddot{\mathbf{z}}$ は $n \times 1$ の変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトルであり、 $\mathbf{Q}(\mathbf{b}, t)$ は $n \times 1$ の外力ベクトルである。 $\mathbf{b}$ は $m \times 1$ のベクトルであり、構造物の断面形状等のパラメータである。 C が M と K の一次結合で表せるとき、式(1)の解は

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{p}(t) \quad (2)$$

で与えられる。ここに $\mathbf{Y}$ は $n \times n$ の基準関数の行列、 $\mathbf{p}$ は $n \times 1$ の基準座標のベクトルである。式(2)およびその時間に関する微分を代入し、 $\mathbf{Y}^T$ を前からかければ次式となる。

$$[m_s] \ddot{\mathbf{p}} + [c_s] \dot{\mathbf{p}} + [k_s] \mathbf{p} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Q} \quad (3)$$

ここに、

$$[m_s] = \mathbf{Y}^T M \mathbf{Y}, \quad [c_s] = \mathbf{Y}^T C \mathbf{Y}, \quad [k_s] = \mathbf{Y}^T K \mathbf{Y} \quad (4)$$

一般に C は明確ではないが、今 $c_s = 2h_s \omega_s m_s$ の様に既知であるとする、式(4)の第2式より

$$C = \mathbf{Y} [c_s] \mathbf{Y}^T \quad (5)$$

となる。ここに $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I}$ である。大型構造物では、全ての固有値、固有ベクトルを計算するのは、効率的ではない。次数の低い方から r 個の固有ベクトルを使用するものとし、それらを $\tilde{\mathbf{Y}}$ で表す。 $\tilde{\mathbf{Y}}$ は $n \times r$ のマトリックスである。式(2)は、近似的に

$$\mathbf{z}(t) \doteq \mathbf{z}_p(t) = \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{p}}(t) \quad (6)$$

と表せる。式(2)の代わりに式(6)を用いると、式(3)は

$$[\tilde{m}_s] \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + [\tilde{c}_s] \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + [\tilde{k}_s] \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Q} \quad (7)$$

となる。ここに、 $[\tilde{m}_s]$, $[\tilde{c}_s]$, $[\tilde{k}_s]$ は、 $[m_s]$, $[c_s]$, $[k_s]$ の最初の r 個の要素を取り出したものである。 c_s と同様 $\tilde{c}_s$ は減衰定数から定まる。式(4)の第2式と同様

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{C} \tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{c}_s] \quad (8)$$

$\tilde{\mathbf{Y}}$ は $n \times r$ ($n > r$) の長方形行列であり、 $(\tilde{\mathbf{Y}})^{-1}$ は存在しないが、

$$\tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (9)$$

なる $\mathbf{P}$ を用いると、式(5)と同様

$$\tilde{C} = \mathbf{P}^T [\tilde{c}_s] \mathbf{P} \quad (10)$$

となる。ここに、 $\mathbf{P}$ は $r \times n$ の行列、 $\mathbf{I}$ は $n \times n$ の単位行列、 $\tilde{C}$ は $r \times r$ の正方行列である。式(1)の解 $\mathbf{z}(t)$ を $\mathbf{z}_p(t)$ で近似すると、変位は比較的精度良く求まるが、高次モードを無視しているためモードの精度が劣ることが知られている。精度を向上させるためには補正をすることが望ましい¹⁾。今

$$\mathbf{z}_p(t) = \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{p}}(t), \quad \dot{\mathbf{z}}_p(t) = \tilde{\mathbf{Y}} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t), \quad \ddot{\mathbf{z}}_p(t) = \tilde{\mathbf{Y}} \ddot{\tilde{\mathbf{p}}}(t) \quad (11)$$

であるから、これ等を式(1)に代入すると、誤差 $\mathbf{E}(t)$ は

$$E(t) = Q(b, t) - M\ddot{z}_p - C\dot{z}_p - Kz_p \quad (12)$$

となる。補正量 z_c は

$$Kz_c = E(t) \quad (13)$$

から求める。したがって、式(1)の解は次式で求められる。

$$z(t) \doteq z_p(t) + z_c. \quad (14)$$

感度解析も同様に行える。すなわち感度 $\delta z(t)$ は次式で求められる。

$$\delta z(t) \doteq \delta z_p(t) + \delta z_c = \sum_{s=1}^r \tilde{Y}_s S_s^T(t) \delta b + \delta z_c. \quad (15)$$

ここに

$$S_s^T(t) = \frac{1}{m_s \omega_{Ds}} \int_0^t \tilde{Y}_s H(\tau) e^{-h_s \omega_{Ds}(t-\tau)} \sin \omega_{Ds}(t-\tau) d\tau \quad (16)$$

$$H(t) = \frac{\partial Q}{\partial b} - \frac{\partial M}{\partial b} \ddot{z}_p - \frac{\partial K}{\partial b} z_p, \quad \omega_{Ds} = \omega_s \sqrt{1-h_s^2} \quad (17)$$

ところで、 δz は次式を満足しなければならない。

$$M\delta\ddot{z} + C\delta\dot{z} + K\delta z = G(t)\delta b \quad (18)$$

ここに

$$G(t) = \frac{\partial Q}{\partial b} - \frac{\partial M}{\partial b} \ddot{z}_p - \frac{\partial K}{\partial b} (z_p + z_c) \quad (19)$$

なお、式(17)の第1式および式(19)の右辺において $(\partial C/\partial b)\dot{z}_p$ の項を無視している²⁾。

また、 δz_c は次式から求まる。

$$K\delta z_c = G(t)\delta b \quad (20)$$

3. 計算例 図1に示す2層2スパンラーメンの計算結果を表1および2に示す。解析変数として断面2次モーメントの逆数を用いている。なお、断面2次

モーメント $= (\text{断面積})^2$ 、 $C = (2h_s/\omega_1)K$ 、表1 節点7の水平変位 (単位 cm)

$h_s = 0.05$ としている。

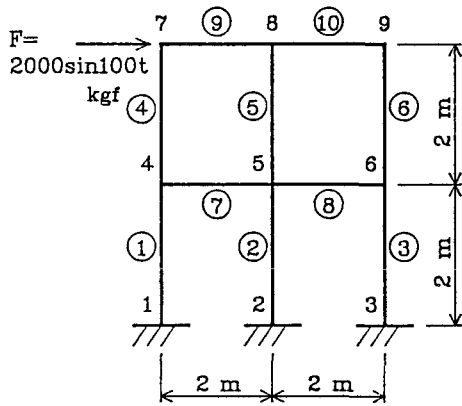


図1 2層2スパンラーメン

区 分	*1 基本系	振動系A *2		振動系B *3	
		推定値	計算値	推定値	計算値
18モード全部	0.75552	0.72880	0.72788	0.64189	0.64584
1モー ドのみ	補正なし	0.73445	0.70292	0.70717	0.62254
	補正あり	0.75429	0.72276	0.72666	0.64237

表2 節点2の曲げモーメント (単位 $\times 10^6$ kgf. cm)

区 分	*1 基本系	振動系A *2		振動系B *3	
		推定値	計算値	推定値	計算値
18モード全部	0.23922	0.24650	0.24675	0.22386	0.22386
1モー ドのみ	補正なし	0.25750	0.27039	0.26633	0.24220
	補正あり	0.25724	0.26027	0.26603	0.22502

注: *1: 全部材とも断面積 50.0 cm², *2: 部材2のみ 5.0% 断面積増加,
*3: 全部材とも断面積 5.0% 増加

参考文献

- 1) Hansteen, O.E. and Bell, K., "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.7, pp.405-411, 1979
- 2) 菊田, 松井, 新延, 動的領域における構造物の感度解析, 構造工学論文集, Vol.33A, pp.703-714, 1987年3月