

I-249 探索を含む掃出し計算を用いた最適解の探索

群馬高専 正員 平田恭久
 東京都立大学 正員 伊藤文人

1 まえがき

筆者らは等式制約法と称する探索法について検討を行ってきたが、等式制約法ではsimplex tableauを用いて活性的な制約面を求めており、かつ双対法の考え方も取り入れられている。非線形計画法(NLP)の中で逐次線形計画法(SLP)は、目的関数、制約条件を線形近似し、線形計画法(LP)を反復使用することにより最適解を探索している。等式制約法の活性的な制約面を求める方法を発展させ、simplex tableauの反復使用によりNLP問題の最適解を探索する方法を示し、この方法と双対法、SLPとの比較を行った。

2 等式制約法での解法

(1)式のNLP問題のLagrange関数が x で微分可能なら双対問題は(2)式で表される。(2)式を双対法で解くには双対変数 λ で探索するが、等式制約法では次のように解く。 x による探索がないと、(2)式第2行はすべての x_j について必ず成立するとは限らないので、左半分のみを用いて(3)式とする。(3)式は λ について線形であり、これはLP問題とみなせるので、simplex法に準じた掃出し計算を行う。 $\partial L / \partial x$ はslack変数に相当するが、 $\partial L / \partial x$ 、 $\partial f / \partial x$ に

非負条件はなく、掃出しでの軸要素の選択はsimplex法とは若干異なる。(3)式のLP問題を解いたとき(x は固定)、slack変数 $\partial L / \partial x$ には0でないものが含まれているが、双対法では(2)式第2行より $\partial L / \partial x = 0$ でなければならない。制約変数 x_m については $\partial L / \partial x_m = 0$ であり、探索変数 x_s について $\partial L / \partial x_s = 0$ となるような探索を行うと、 x の変化が生じ、再び(3)式を解く。 x_s による探索と(3)式を解くことの反復により、(2)式が成立するように収束していく。

3 逐次線形計画法との関連

(1)式のNLP問題を線形近似してLPを適用することを考える。(1)式の目的関数、制約式を x_k のまわりでTaylor展開し、1次の項までとり、LP問題として扱うため形式的に $\Delta x_k \geq 0$ の条件を加えると、(4)式になる。(4)式を主問題としたときの双対問題は(5)式になり、(5)式第2行にslack変数 $\partial L_k / \partial x$ を加えると、(3)式の等式制約法でのLP問題と一致する。SLPでは線形近似したLP問題の主問題を解いているのに対し、等式制約法では双対問題を解いていることになる。NLP問題の最適解が許容領域の頂点に存在しない場合にSLPを適用すると、近似LP問題の解は許容領域の頂点間を振動する欠点がある。NLP問題では制約面の交線上に解が存在し、交線上での探索が必要な場合が一般的であるが、この問題点を等式制約法では上記の $\partial L / \partial x_s = 0$ となるような探索で解決している。

$$\min_x f(x) \quad \text{subj. to } g(x) \leq 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\max_{\lambda} \{ f(x) + \lambda^T g(x) \} \quad \text{subj. to } \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$\max_{\lambda} \lambda^T g + f \quad \text{subj. to } -\lambda^T \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \dots\dots(3)$$

$$\min_x \frac{\partial f_k}{\partial x} \Delta x_k + f_k \quad \text{subj. to } -\frac{\partial g_k}{\partial x} \Delta x_k \geq g_k \quad \dots\dots(4)$$

$$\max_{\lambda} g_k^T \lambda_k + f_k \quad \text{subj. to } -\frac{\partial g_k}{\partial x} \lambda_k \leq \frac{\partial f_k}{\partial x} \quad \dots\dots(5)$$

表-1 Δx_m 掃出しに伴うtableau内容

	f	g_m	g_{r-m}	Δx_m	Δx_s
g	$f + \Delta f_m$	0_m^T	A	Δx_m^T	0_s^T
x_m	λ_m	I_m	B	$\left[-\frac{\partial g_m}{\partial x_m}^T \right]^{-1}$	0
x_s	$\frac{\partial L}{\partial x_s}$	0^T	C	D	I_s

$$\Delta x_s \text{掃出しに伴う } g \text{行 } \Delta x_m \text{列} \\ = \Delta x_m^T + \Delta x_s^T \left\{ -\frac{\partial g_m}{\partial x_m}^T \right\} \left\{ \frac{\partial g_m}{\partial x_m}^T \right\}^{-1} \dots\dots(6)$$

$$\Delta x_{sj} = -\frac{\partial L}{\partial x_{sj}} \Bigg/ \frac{\partial f}{\partial x_{sj}} \Bigg| x_{sj} \cdot \beta_j \dots\dots(7)$$

4 探索法の概念

simplex tableau を用いた掃出し計算により、1) 制約式 g_m と制約変数 x_m (残りが探索変数 x_s) の選択 2) 探索方向を示す $\partial L / \partial x_s$ と $g_m = 0$ に近づく Δx_m の算出 がなされる。これを Δx_m 掃出しと称し、掃出した段階を表-1に示す。探索方向ベクトル Δx_s が得られていると、 Δx_s を表-1の x_s 行に乗じて g 行に加えると、(6)式の値が g 行 Δx_m 列に得られる。この操作を Δx_s 掃出しと称し、 Δx_s 掃出しにより x_s の変化に対して $g_m = 0$ に沿うような x_m の変化が生じる。

Δx_m 掃出し、 Δx_s 掃出しを用いた探索法の概要を図-1に示す。現在の x は点 a である。 Δx_m 掃出しにより Δx_m が生じて点 b になる。探索変数の変化 Δx_s は点 c であるが、 Δx_m 掃出しを行った tableau で引続いて Δx_s 掃出しを行うと、制約変数の変化は(6)式第2項であり、 Δx_s と合わせ点 d になる。掃出しに伴う Δx は tableau の g 行 Δx_m 列及び Δx_s 列に生じており、 $x = x + \Delta x$ を実行すれば次の点 d を得る。

Δx_m 掃出しにより、活性な制約面 $g_m = 0$ に近づこうとする tableau 内容が得られ、この tableau 内容で Δx_s 掃出しを行うと、 $g_m = 0$ に沿って進む動きになり、探索での step 幅を大きくしなければ $g_m = 0$ から大きく離れることはない。最適解へ近づくとき Δx_s は一般に小さくなるので、 Δx_s に伴う Δx_m も小さくなり、 $\Delta x = 0$ になることが期待できる。

5 概要フローチャート

$\partial L / \partial x_s = 0$ を Newton 法で解くときの Δx_s を探索方向ベクトルに用いると、差分と逆行列の計算が必要である。simplex tableau の反復使用という単純な仕組みにするため、 Δx_m 掃出しで tableau の x_s 行 f 列に生じる $\partial L / \partial x_{s_j}$ を(7)式で変換した簡易な Δx_s を用いている。探索では Δx_s に step 幅 α を乗じて進んでいくが、 $\partial L / \partial x_s$ は常に tableau に生じているので、各 step ごとに(7)式で更新していく。このため(7)式 Δx_s の探索方向が良好でない場合でも Δx_s は最適解に近づくように更新されていく。

Δx_m 掃出し及び Δx_s 掃出しと簡易な探索方向ベクトルを用い、simplex tableau を反復使用する探索法の概要フローチャートを図-2に示す。 Δx_m 掃出しでは $g \leq 0$ 及び $\lambda \geq 0$ の条件を満足するように掃出しを実行しているため、この条件の判定は基本的には必要ない。探索終了判定は $\Delta x = 0$ である。探索途中は $g_m = 0$ に沿って進んでいくが、もし $g_m = 0$ 上に乗せる必要があれば探索途中で $\Delta x_m = 0$ の判定を付加すればよい。概要フローチャートに基いて活荷重合成桁の主桁断面決定のプログラムを作成したが、選択した制約式 g_m と制約変数 x_m をなるべく保持するため、 g_m 、 x_m を指定して Δx_m 掃出しを実行する形にしている。このため $\lambda_i < 0$ の制約式が含まれ得るので、 $\lambda \geq 0$ の判定を加えている。

6 まとめ

探索を含んだ simplex tableau による掃出し計算を用いて NLP 問題の最適解を探索する方法を示したが、1) simplex tableau の反復使用という簡単な仕組みで NLP 問題の最適解を探索することができる 2) 探索を含むため、制約面の交線上を探索する必要のある場合でもなんら支障がない 3) この方法により実用的なプログラムを作成し、活荷重合成桁の主桁断面決定の解を求めることができる の結果が得られた。

図-1 Δx_m 掃出し、 Δx_s 掃出しによる $x = x + \Delta x$ の変化

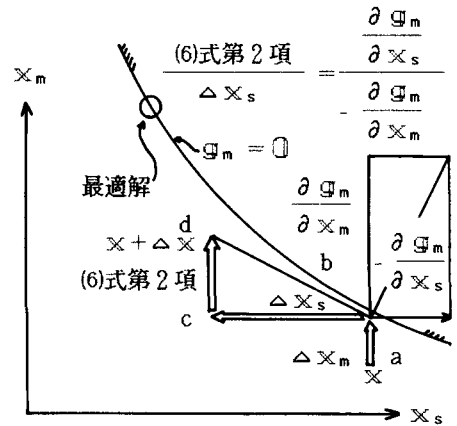


図-2 概要フローチャート

