

松江高専土木科 正員 浜野 浩幹
山梨大学工学部 正員 平島 健一

1. はじめに. 機械や構造物を構成する固体構造材料の破壊現象を定量的に説明するための手法として, 構造部材中のクラックの存在を前提とした線形破壊力学的アプローチがある. これは, 破壊現象を応力拡大係数や, それに準ずるエネルギー解放率, クラック先端の開口変位等といった力学的パラメータによって定量的に把握し, 材料破壊の目安をつけようとするものである. 本研究も上記のことを線形弾性論から得られる成果を基に, 応力特異性の解析を数値的に解明しようとするものである.

二次元クラック先端部付近の応力特異性についての既往の研究としては, Williams による任意の開き角を持つ均質材中のクラックの解, Cook & Erdogan, Lin & Mar による, それぞれ異種材料の結合面と直角方向, 結合面と平行な方向のスリット・クラックの解, 藤谷らによりこれらを任意の開き角を持つクラックに適用した解, さらに Fenner による異種材料の結合面に対して任意の角度を持つスリット・クラックの解等を列挙することができる. 本研究では以上の成果を踏まえて Fig.1 に示したような一般の形態(即ち, 異種材料の任意の弾性定数, および任意のクラックの方向と開き角)を持つクラックの応力特異性を求めるため, クラック縁での境界条件と異種材料結合面での連続条件から構成される特性行列式の根を求める手法によって定式化を試みたものである. 当然, ここで得られる解曲線は上述の研究者の結果の全てを包含したものとなる. また, これらの解は二次元クラックの存在する面内の破壊モードに対応するもの(即ち, Model I, Model II あるいはそれらが混合したモード, 以下面内モードと呼ぶ)であるが, Model III のもの(面外問題と呼ぶ)についても合わせ報告する.

2. 基本式 - I. 面内問題- 特異点近傍の特性を検討するため, 極座標表示の変位成分 u_r, u_θ を次式のように仮定する.

$$u_r(r, \theta) = r^\lambda \cdot u_r^*(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^\lambda \cdot u_\theta^*(\theta). \quad (1)$$

ここに, λ は応力特異性を評価するパラメータである. 式(1)をひずみ-変位関係式および線形弾性体の構成方程式に代入し, さらにこれを釣合方程式に代入し整理すれば, u_r^*, u_θ^* に関する二次元の連立微分方程式が得られる. これを解くことによって次式のように一般解および特異点近傍の応力成分が求められる.

$$\left. \begin{aligned} u_r^*(\theta) &= a_1 \sin(\lambda+1)\theta + a_2 \cos(\lambda+1)\theta + a_3 \sin(\lambda-1)\theta + a_4 \cos(\lambda-1)\theta, \\ u_\theta^*(\theta) &= a_1 \cos(\lambda+1)\theta - a_2 \sin(\lambda+1)\theta + \frac{\lambda+\kappa}{\lambda-\kappa} a_3 \cos(\lambda-1)\theta - \frac{\lambda+\kappa}{\lambda-\kappa} a_4 \sin(\lambda-1)\theta. \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &= r^{\lambda-1} G \left[2\lambda \{a_1 \sin(\lambda+1)\theta + a_2 \cos(\lambda+1)\theta\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda(\lambda-3)}{\lambda-\kappa} \{a_3 \sin(\lambda-1)\theta + a_4 \cos(\lambda-1)\theta\} \right], \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= r^{\lambda-1} G \left[-2\lambda \{a_1 \sin(\lambda+1)\theta + a_2 \cos(\lambda+1)\theta\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\lambda(\lambda+1)}{\lambda-\kappa} \{a_3 \sin(\lambda-1)\theta + a_4 \cos(\lambda-1)\theta\} \right], \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= r^{\lambda-1} G \left[2\lambda \{a_1 \cos(\lambda+1)\theta - a_2 \sin(\lambda+1)\theta\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda(\lambda-1)}{\lambda-\kappa} \{a_3 \cos(\lambda-1)\theta - a_4 \sin(\lambda-1)\theta\} \right]. \end{aligned} \right\} (3)$$

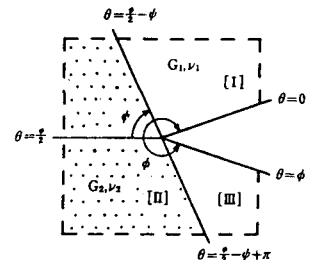


Fig. 1. Notation for crack geometry.

Fig.1 に示すように, 弾性定数 G_j, ν_j ($j=1,2$) の異なる二種の材料が領域角 ϕ , 傾斜角 ψ で接合面を持つ場合を考えるものとするれば, この場合の境界条件は次式のようになる:

$$\left. \begin{aligned}
 \theta = 0 \text{ での無応力条件: } & \quad \begin{aligned} & \sigma_{\theta} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \\ & u_r = z u_r, \quad \sigma_{\theta} = z \sigma_{\theta}, \\ & u_{\theta} = z u_{\theta}, \quad \tau_{r\theta} = z \tau_{r\theta}, \end{aligned} \\
 \theta = \frac{\pi}{2} - \psi \text{ での応力および変位の連続条件: } & \\
 \theta = \frac{\phi}{2} - \psi + \pi \text{ での応力および変位の連続条件: } & \quad \begin{aligned} & u_r = z u_r, \quad \sigma_{\theta} = z \sigma_{\theta}, \\ & u_{\theta} = z u_{\theta}, \quad \tau_{r\theta} = z \tau_{r\theta}, \end{aligned} \\
 \theta = \phi \text{ での無応力条件: } & \quad \begin{aligned} & \sigma_{\theta} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned}
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

これらの境界条件に式(1),(2),(3)を代入し整理すれば、12個の未知定数に関する同次型の12元連立1次方程式が求められる。これらの未知定数が有意な解を持つためには、その係数行列式の値が零となればよい。この解は計算機を用いて数値的に求めることが可能である。

3. 基本式 — II. 面外問題 — 面内問題の場合 $u_r^*(\theta) = A \cos \lambda \theta - B \sin \lambda \theta$. (5)

と同様にして一般解および特異点近傍の応力成分は式 $\tau_{r\theta}(r, \theta) = \lambda r^{i-1} G \{A \cos \lambda \theta - B \sin \lambda \theta\}$, (6)

(5),(6)のようになる。また、Fig.1 に示した結合面と $\tau_{r\theta}(r, \theta) = -\lambda r^{i-1} G \{A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta\}$. (7)

クラック角の場合に対する境界条件は式(7)のように与えられる：
 $\theta = 0$ での無応力条件： $\tau_{r\theta} = 0$,
 $\theta = \phi/2 - \psi$ での応力および変位の連続条件： $\tau_{r\theta} = z \tau_{r\theta}, u_r = z u_r$,
 $\theta = \phi/2 - \psi + \pi$ での応力および変位の連続条件： $\tau_{r\theta} = z \tau_{r\theta}, u_r = z u_r$,
 $\theta = \phi$ での無応力条件： $\tau_{r\theta} = 0$. (7)

これらの未知定数が有意な解を持つためには、その係数行列式の値が零となればよい。この特性行列式は最終的に次式のように展開することができる。

$$(1+m)^2 \sin \lambda \phi - (1-m)^2 \sin \lambda (\phi - 2\pi) - 2(1-m^2) \sin \lambda \pi \cos \lambda (\pi - 2\psi) = 0. \quad (8)$$

4. 数値計算例 平面ひずみ状態の場合とし、異種材料のポアソン比を $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ として計算する。面内問題の場合は異種材料の接合面角 $\psi = 30^\circ$ とし、剛性比 $m (=G_2/G_1) = 0.05, 0.1, 0.2, 1, 5, 10, 20$ 、領域角 $\phi = 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ$ と変化させた場合の特異解曲線を Fig.2 に示す。また、面外問題の場合は領域角 $\phi = 240^\circ$ とし、接合面角 $\psi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ と変化させた場合のものを Fig.3 に示す。

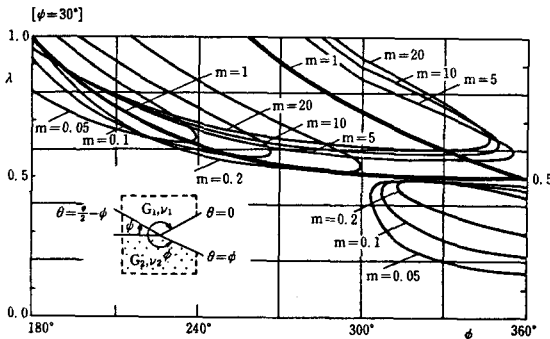


Fig. 2. Eigenvalues for the plane problem ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) with interface angle $\psi = 30^\circ$.

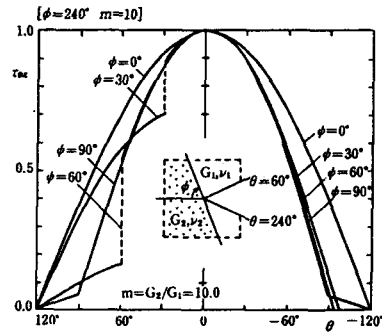


Fig. 3. Crack-trip cleavage stress distribution in the antiplane strain problem ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$) with crack opening angle 120° (i. e. $\phi = 240^\circ$) for the case of $m = 10$.

5. むすび. 2種類の異種材料が結合された部分に任意の開口角を有するクラックが存在する場合の応力特異性を最も一般的な場合を含めて解析することを試みた。定式化はベキ乗型の特異解 λ を特性方程式の根を探すという手法をとった。本法で得られた数値結果は現在までこの種の問題の最も一般的なものとなっており、従来までの各研究者の結果が本結果のいずれかに該当するようになっている。

6. 参考文献. Fenner, D.N., Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface, Int. J. Fracture, 12, 705-721, (1976).