

I-105 クラック問題に対する境界積分方程式法の適用例

鹿島建設 正員 上原 啓史
 東京大学 正員 長谷川彰夫

東京大学 正員 堀井 秀之
 東京大学 正員 西野 文雄

1. まえがき

近年、様々な分野において境界積分方程式法(境界要素法)の適用が試みられている。有限要素法などの領域分割法を二次元、三次元の問題に適用すると、取り扱う代数方程式の変数の数が大きくなる。クラック問題に対して有限要素法を適用する場合には、クラック先端の応力特異性の取扱い、メッシュ分割の方法などに工夫が必要であり、クラックを進展させるごとにメッシュ分割をやり直す必要がある。境界積分方程式法は境界上の未知量に関する積分方程式に基づいており、考えている問題の次元が一つ下がるため、変数の数、入力データ数が大幅に減少し、特にクラック進展の問題のように境界の幾何形状が変化する問題に対しては有利である。境界積分方程式法をクラック問題に適用する試みは数多く発表されているが¹⁾、一般的な定式化が明確な形で行われているとは言い難い。そこで本研究では、境界積分方程式法のクラック問題に対する定式化を行い、それを離散化した数値解析プログラムを用いていくつかの2次元問題の解析を行った。

2. 境界積分方程式法のクラック問題に対する定式化

本研究では、体積力のない静弾性問題を解析の対象とし、物体は線形等方弾性体とする。この場合の支配方程式であるNavierの方程式に対するGreenの公式において、試行関数としてNavierの方程式に対する基本Green関数を用いることなどにより、次の2つの恒等式が得られる。

$$u_i(x) = \int_{\Omega} U_{ij}(x_0; x) t_j(x_0) ds(x_0) - \int_{\Omega} T_{ij}(x_0; x) u_j(x_0) ds(x_0) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} D_{kij}(x_0; x) t_k(x_0) ds(x_0) - \int_{\Omega} S_{kij}(x_0; x) u_k(x_0) ds(x_0) \quad (2)$$

これらは、任意点の変位 $u_i(x)$ と応力 $\sigma_{ij}(x)$ を境界上の変位 $u_j(x_0)$ とトラクション $t_k(x_0)$ で表した式である。(核関数 $U_{ij}(x_0; x)$ 、 $T_{ij}(x_0; x)$ 、 $D_{kij}(x_0; x)$ 、 $S_{kij}(x_0; x)$ の具体形は参考文献2)を参照)

これらの式において点 x を境界上の点 x_0 に近付ける極限操作を行うことにより、境界上の変位とトラクションに関する2つの境界積分方程式が得られる。この極限操作において被積分関数の超関数的取扱いが必要となる。極限操作の結果得られる境界積分方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{2} u_i(x_0) = p.v. \int_{\Omega} U_{ij}(x; x_0) t_j(x) ds(x) - p.v. \int_{\Omega} T_{ij}(x; x_0) u_j(x) ds(x) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} t_i(x_0) = p.v. \int_{\Omega} D_{kij}(x; x_0) t_k(x) n_j(x_0) ds(x) - p.f. \int_{\Omega} S_{kij}(x; x_0) u_k(x) n_j(x_0) ds(x) \quad (4)$$

ここで $p.v. \int$ 、 $p.f. \int$ はそれぞれ積分のCauchyの主値と積分の有限部分を表す。

この2つの境界積分方程式の一方を用いることにより弾性問題を解くことができる。しかし、クラック問題では以下に示すように、クラック面上では式(3)、(4)の両者を用いることが必要となる。

クラックを有する弾性体 V を考え、その境界を図1のように定義する。クラックの上下表面 Γ^+ 、 Γ^- での変位及びトラクションを u_i^+ 、 u_i^- 及び t_i^+ 、 t_i^- とする。更に、核関数のクラック上面と下面での値の関係を考えることにより、クラックを有する弾性体の境界値問題に対する境界積分方程式は、次のようになる。境界 S 上の点 x_0 に対して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(x_0) = & p.v. \int_{\Omega} U_{ij}(x; x_0) t_j(x) ds(x) - p.v. \int_{\Omega} T_{ij}(x; x_0) u_j(x) ds(x) \\ & + \int_{\Gamma^+} U_{ij}^+(x; x_0) [t_j^+(x) + t_j^-(x)] ds(x) - \int_{\Gamma^+} T_{ij}^+(x; x_0) [u_j^+(x) - u_j^-(x)] ds(x) \end{aligned} \quad (5)$$

或は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t_i(x_0) = & p.v. \int_{\Omega} D_{kij}(x; x_0) t_k(x) ds(x) n_j(x_0) - p.f. \int_{\Omega} S_{kij}(x; x_0) u_k(x) ds(x) n_j(x_0) \\ & + \int_{\Gamma^+} D_{kij}^+(x; x_0) [t_k^+(x) + t_k^-(x)] ds(x) n_j(x_0) - \int_{\Gamma^+} S_{kij}^+(x; x_0) [u_k^+(x) - u_k^-(x)] ds(x) n_j(x_0) \end{aligned} \quad (6)$$

境界 Γ 上 x_0 の点に対して、

$$\frac{1}{2} [u_i^+(x_0) + u_i^-(x_0)] = \int_{\Omega} U_{ij}(x; x_0) t_j(x) ds(x) - \int_{\Omega} T_{ij}(x; x_0) u_j(x) ds(x)$$

$$+p.v. \int_{\Gamma} U_{ij}^{\dagger}(x; x_0) [\dot{t}_j(x) + \dot{t}_j(x)] ds(x) - p.v. \int_{\Gamma} T_{ij}^{\dagger}(x; x_0) [\dot{u}_j(x) - \dot{u}_j(x)] ds(x) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} [\dot{t}_i(x_0) - \dot{t}_i(x_0)] = \int_{\Omega} D_{kij}(x; x_0) t_k(x) ds(x) n_j(x_0) - \int_{\Omega} S_{kij}(x; x_0) u_k(x) ds(x) n_j(x_0)$$

$$+p.v. \int_{\Gamma} D_{kij}^{\dagger}(x; x_0) [\dot{t}_k(x) + \dot{t}_k(x)] ds(x) n_j(x_0) - Pf \int_{\Gamma} S_{kij}^{\dagger}(x; x_0) [\dot{u}_k(x) - \dot{u}_k(x)] ds(x) n_j(x_0) \quad (8)$$

これらにより、任意の境界条件のクラック問題を解析することが出来る。クラック先端近傍における開口変位の分布形は式(8) 自身より導かれ、また、クラック先端近傍の応力分布の特異性、応力拡大係数と開口変位との関係を式(2) より導くことが出来る。ここでは、境界上の未知量を区分的に一定と近似して離散化することにより数値解析プログラムを開発した。但し、クラック先端近傍の開口変位については前述の分布形を考慮し、重み関数を導入した。以下にその数値解析例を示す。

3. 解析例

初めに、図2に示す一様内圧を受ける無限体内の円孔の問題を解き、式(3)による結果と式(4)による結果を図3に示す。ここでNは分割要素数を表す。Nを増加させるとき、両者とも厳密解に収束する。式(4)に基づく計算結果の収束は式(3)のそれと比較して遅いが、これは被積分関数の特異性の高さからくるものと考えられる。次に、図4に示すような円弧クラックの問題を解き、得られた応力拡大係数の値を図5に示す。解は厳密解に収束することが示されている。ここでは被積分関数 S_{kij} の特異性について特別な配慮をしておらず、また未知量を区分的に一定として離散化している。この2点を改良し、精度・収束性に検討を加えることは今後の課題である。また、本解析法の応用例として鉄筋コンクリート梁のせん断ひび割れ進展の解析を試みた。その結果を図6に示す。破壊基準に基づいてクラックの本数を増やし、実際の現象により近い解析を行い、RC梁のせん断強度を破壊力学的にとらえる試みを現在進めている。本解析手法は不連続面を有する任意の弾性問題に対して適用可能であり、有限寸法の供試体におけるプロセスゾーン、砂の進行性破壊の問題など広い応用範囲が考えられる。

参考文献 1) Cruse, T. A. and Vanburen, W. : Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, Int. J. Fracture Mech., 7, 1-15, 1971 2) Brebbia, C. A. (ed.) : Progress in Boundary Element Methods-1, Pentech Press, 1982

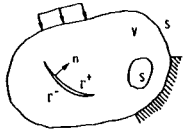


図1 任意のクラック問題

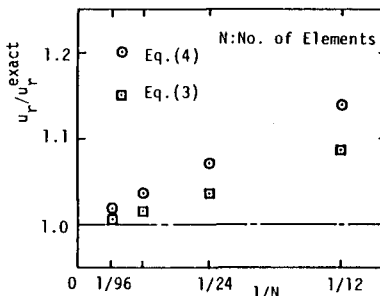


図3 半径方向変位

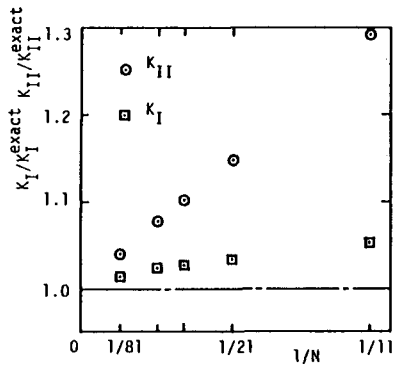


図5 クラック先端応力拡大係数

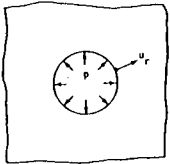


図2 一様内圧を受ける円孔

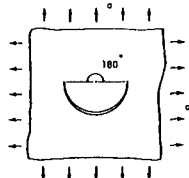


図4 円弧クラック

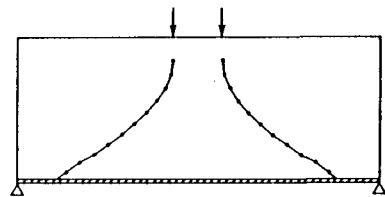


図6 鉄筋コンクリート梁モデルにおけるクラック進展経路