I-104

積分方程式による３次元クラック解析

京都大学工学部　西村直志　　建設省　金子正洋
京都大学工学部　小林昭一

１　序

積分方程式法を用いて線形破壊力学の問題を解析する場合，クラックを有する弾性体のグリーン関数を用いる方法，問題をインターフェイスの問題に置き換える方法，及び二重層ポテンシャルを用いる方法が考えられる．この内，解析法の一般性に関しては，二重層ポテンシャルによる方法が優れているが，強い特異性を持つ積分を評価することが必要になるという欠点もある．本報では，三次元定常動弾性問題を考え，特異積分を一切含まない積分方程式を導き，簡単な数値例を示す．

２　二重層ポテンシャルの正則化

S を R^3 における，滑らかな縁 E 及び単位法線ベクトル n を持つ曲面とする．次の問題を考える．

$$\Delta^* u + \rho\omega^2 u = 0 \quad \text{in} \quad R^3\setminus S \ (\Delta^* u := \nabla\cdot C[\nabla u]),$$

$$Tu = 0 \quad \text{on } S \ (Tu := n\cdot C[\nabla u]), \qquad [u] = 0 \quad \text{on } E \ ([u] := u^+ - u^- = \text{開口変位}),$$

$$u - u_I \text{ が放射条件を満たす } (\Delta^* u_I + \rho\omega^2 u_I = 0 \text{ in } R^3). \tag{1a-d}$$

なる u を求める．ここに u, u_I, C, ρ, ω は，それぞれ，変位，入射波，弾性常数テンソル，密度，及び周波数である．よく知られているように，このような u は 次の二重層表示を持つ：

$$u(x) = u_I(x) + \int_S (T_y\Gamma)^T(x, y)\ \psi(y)\ dS_y, \quad x \in R^3\setminus S$$

$$\Gamma_{ij} = 1/4\pi\ [\exp(ikTr)\delta_{ij} + 1/k_T^2\ \nabla_i\nabla_j(\exp(ik_Tr) - \exp(ik_Lr)], \quad (r := |x - y|) \tag{2a,b}$$

ここに，ψ (=【u】) は二重層密度，Γはいわゆる基本解，k_T, k_L は，それぞれ S 波， P 波の波数である．(2a), (1b) より ψ に関する積分方程式が得られるが，(2b) より明らかなように得られる積分方程式は $O(1/r^3)$ となり，主値の意味でさえ可積分でないので，数値解析に応用するには不適当である．しかし部分積分を用いることにより (2a) の微分は次のように書かれる：

$$\nabla_p \int_S \nabla_k\Gamma_{ij}\ C_{jklm}\ n_l\ \psi_m\ dS = \rho\omega^2 \int_S \Gamma_{im}\ n_p\ \psi_m\ dS$$

$$+ e_{lpu}\ C_{jklm}\{\int_S (n\cdot\xi)/r\ [\delta_{ij}\ F' + (\delta_{ij} + 2n_in_j)(G''/r - G'/r^2)$$

$$+ \xi_i\xi_j/r^2\ (3G'/r^2 - 3G''/r + G''')]\ e_{tsu}\ n_t\ \psi_{m,s}\ dS$$

$$+ \text{p.f.} \int_S G'/r\ e_{qrw}\ n_q\ \nabla_r[(n_j\ e_{piw}\ n_p + n_i\ e_{pjw}\ n_p)\ n_k\ e_{tsu}\ n_t\ \psi_{m,s}]\ dS$$

$$+ \text{p.f.} \int_S \Gamma_{ij}\ e_{qrw}\ n_q\ \nabla_r[e_{vkw}\ n_v\ e_{twu}\ n_t\ \psi_{m,s}]\ dS\}, \tag{3}$$

ここに，F，G はそれぞれ（2b）における δ，$\nabla_i\nabla_i$ の係数（r の関数とみる），また $\xi = x - y$ である．(3) の有限部分は E における開口変位の特異性による．スペースの都合で詳細は省略するが，これらの p.f. の計算は容易であり，また，核の特異性は高々可積分（$O(1/r)$）であるから，(3) は数値解析に好都合である．なお (3) で $x \to S$ とすると非積分項が現れるが C 及び n を乗ずると０になる．

3　数値解析法，及び解析例

E が十分滑らかなとき，S を円に写す滑らかな写像を作ることは難しくないので，以下では簡単の為に S が半径 a の円（従って平面）である場合に限って議論を進める．

先ず，ψ に何等かの離散化を行って，(3) に選点法を適用する場合，少なくとも選点近傍で C^1 クラスに属する関数を用いねばならないことに注意する．実際，そうでなければ (3) は対数オーダーで発散することになる．一方有限要素法における経験より C^1 要素を使うことは容易でないことが予想される．そこで，先ず円 S 上に極座標（r，θ）を導入し，さらに $r = a\sin(\pi t/2a)$ として座標（t，θ）を考える．次に（t，θ）面内に等間隔格子を作り（$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = a$，等），その上で t（及び$\theta$）に関する３次の B スプラインをつくる．$\theta$ に関するものは周期スプラインとなり，t に関するものは t=a で t に関する偶数次（0 次を含む）の微分が 0 になるように選ぶ．これらの積により $t \geq t_2$ の格子点でピークを有する形状関数 $\Omega_i(t, \theta)$ をつくる．$t < t_2$ については（t，θ）面内に適当に点を取り，それらを中心とする小円を作る．それらの中では中心からの距離δの B スプラインを形状関数 $\Omega_i(\delta(t, \theta))$ に選ぶ．最後にこれらの形状関数を用いた離散化 $\psi(x) \sim \Sigma \psi_i\ \Omega_i(t, \theta)$ を (3) に代入し，(1b) より得られる積分方程式を選点法で解いて開口変位を求める．特に r と t の関係から，選んだψの近似関数が E で $(a - r)^{1/2}$ の特異性を持つことに注意すれば，その係数より応力拡大係数がもとまる．

以上の方法で，円形クラックに真下より P 波が入射したときの応答を求め，Mal の解 [1] と比較した．177 自由度の要素分割を用い，Poisson 比は 0.25 とした．図１には開口変位の絶対値，図２には応力拡大係数を示した．何れも線は Mal の解，記号は本解析の結果を示す．これらの例より本解析法の妥当性が示された．

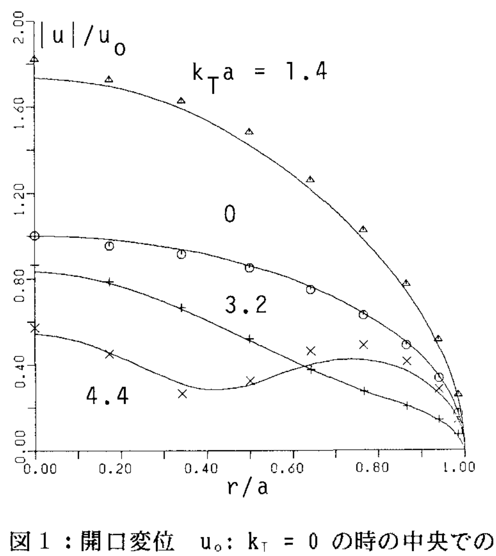

図１：開口変位　u_o: $k_T = 0$ の時の中央での変位

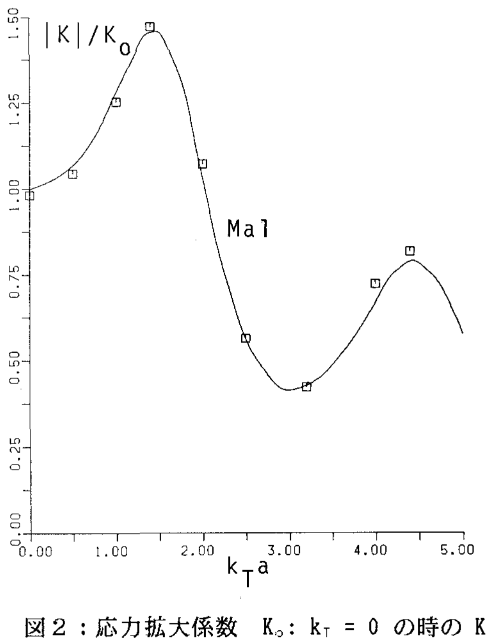

図２：応力拡大係数　K_o: $k_T = 0$ の時の K

[1] Mal, A.K., Int. J. Eng. Sci., 8, p.381, 1970