

I-102 Simple Support型の混合境界値問題 (薄板曲げ問題)

名古屋市役所 正 員 伊藤 慎浩
名古屋工業大学 正 員 長谷部 宣男
名古屋工業大学 正 員 中村 卓次

【1. まえがき】 一般に、境界上の一部で外力2成分を与え(この境界をL境界とする)、他の境界上で外力1成分、変位1成分を与える(この境界をM境界とする)弾性問題は非常に難しく、現在のところ任意形状に対して閉じた解はまだ得られていないと思われる。しかし、M境界が直線の場合には数学上の問題点を一部回避でき、閉じた一般解を求めることができる。工学上、直線境界はよく見られるため、その応用性は広いと考えられる。[図-1参照]

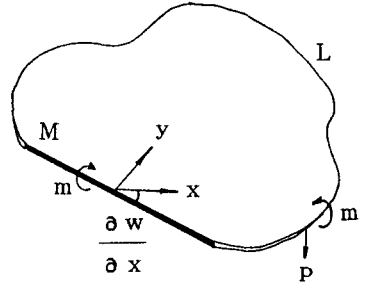


図-1 物理形状

【2. 写像関数】 物理面を単位円内部(若しくは外部)領域 S^+ に等角写像する写像関数を分数式の和の形で与える。この場合、M境界はX軸に平行におく。たとえば図-2に示す物理面を単位円内部領域に写像する写像関数は次式により与えられる。

$$\omega(\xi) = E_0 / (1 - \xi) + \sum E_k / (\xi_k - \xi) + E_c$$

ここで、 ξ_k は S^+ 外の領域 S^- 内の点を表す。

【3. 複素応力関数 $\phi(\xi)$, $\psi(\xi)$ 】 外力境界条件式及び変位境界条件式は次式により与えられる。

$$-x\phi(\xi) + \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\phi'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = \frac{1}{D(1-\nu)} \int [m(s) + i \int p(s) ds] dz \quad \dots \quad (1)$$

$$\phi(\xi) + \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\phi'(\xi)} + \psi(\xi) = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots \quad (2)$$

ここに、 $x = (3+\nu)/(1-\nu)$: ν はポアソン比、 D は曲げ剛性、 m , p はそれぞれ単位長さ当りの曲げモーメント、せん断力を表わし、 s は境界線上の長さを表わす。 w は板の垂直方向変位を表わす。

次に、外力の作用していない自由境界が存在すると仮定する。工学上、自由境界を持つ形状を取扱うことは極めて多い。この仮定から $\psi(\xi)$ は解析接続により得られる。

$$\psi(\xi) = x \overline{\phi(1/\xi)} - \frac{\overline{\omega(1/\xi)}}{\omega'(\xi)} \phi'(\xi) \quad \dots \quad (3)$$

[1] L上境界条件式 外力の2成分 $m(s)$, $p(s)$ が与えられる。単位円周上の点を σ とし、式③を式①に代入後L上で $\xi \rightarrow \sigma$ の極限を取る。

$$\phi^+(\sigma) - \phi^-(\sigma) = -\frac{1}{x(1-\nu)D} \int_L [m(s) + i \int p(s) ds] dz \equiv f_L(\sigma) \quad \dots \quad (4)$$

[2] M上境界条件式 外力の2成分 $m(s)$ と変位成分 $\partial w / \partial x$ が与えられる。 $dz = dx$ を利用し、式③を式①に代入後M上で $\xi \rightarrow \sigma$ の極限を取る。これと共役な式との和をとると次式を得る。

$$[\phi^+(\sigma) - \phi^-(\sigma)] + [\overline{\phi^+(\sigma)} - \overline{\phi^-(\sigma)}] = -\frac{2}{x(1-\nu)D} \int_M m(s) dx \equiv N(\sigma) \quad \dots \quad (5)$$

上式を $\Theta(\xi) \equiv \phi(\xi) - \phi(1/\xi)$ を用いて書き換えると $\Theta(\xi)$ の一般解は次式となる。

$$\Theta(\xi) = G(\xi) + R(\xi) \quad \dots \quad (6)$$

ここに

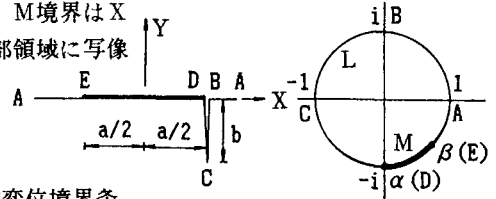


図-2 解析面と単位円

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{N(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma \quad : R(\xi) \text{は任意関数}$$

従って式⑥より次式を得る。

$$\phi^-(\sigma) = \phi^+(\sigma) - G^+(\sigma) - R(\sigma); \quad \overline{\phi^-(\sigma)} = \overline{\phi^+(\sigma)} - \overline{G^+(\sigma)} - \overline{R(\sigma)} \quad \dots\dots\dots ⑦$$

次に、式③を式②に代入後M上で $\xi \rightarrow \sigma$ の極限を取る。これと共役な式との和をとると次式を得る。

$$[\phi^+(\sigma) + \chi \phi^-(\sigma)] + [\overline{\phi^+(\sigma)} + \chi \overline{\phi^-(\sigma)}] = 2 \partial w / \partial x \equiv L(\sigma) \quad \dots\dots\dots ⑧$$

式⑦を式⑧に代入するとM上境界条件式として次式を得る。

$$\phi^+(\sigma) + \phi^-(\sigma) = f_M(\sigma) + R(\sigma) \quad \dots\dots\dots ⑨$$

ここに $f_M(\xi) \equiv \frac{1}{\chi + 1} [L(\xi) + \chi G^+(\xi) + G^-(\xi)]$

式④、⑨により与えられるRiemann-Hilbert問題の解は次式となる。

$$\phi(\xi) = H(\xi) + \frac{\chi(\xi)}{2\pi i} \int_M \frac{R(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \xi)} d\sigma + Q(\xi) \chi(\xi) \quad \dots\dots\dots ⑩$$

$$H(\xi) = \frac{\chi(\xi)}{2\pi i} \int_L \frac{f_L(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \xi)} d\sigma + \frac{\chi(\xi)}{2\pi i} \int_M \frac{f_M(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \xi)} d\sigma \quad \dots\dots\dots ⑪$$

ここに $\chi(\xi)$ はPlemelj関数でM境界の端点 α, β を用いて $\chi(\xi) = (\xi - \alpha)^{0.5} (\xi - \beta)^{0.5}$ と表わされる。

また $Q(\xi)$ は任意関数である。式④、⑨から明らかなように $H(\xi)$ は荷重項を示している。

ここで $R(\xi)$ を、後に一位の極しか持たないことが示されるため、次式として表わす。

$$R(\xi) = \sum_{1k=1}^n \frac{C_{1k}}{\xi_{1k} - \xi} + \sum_{2k=1}^n \frac{C_{2k}}{\xi_{2k} - \xi} \quad \dots\dots\dots ⑫$$

$C_{1k}, C_{2k}, \xi_{1k}, \xi_{2k}$ は未定定数、ただし、 $\xi_{1k} \in S^-$, $\xi_{2k} \in S^+$ とする。

式⑫を式⑩に代入、さらにこれを式③に代入する。 S^+ 内において $\psi(\xi)$ が正則である条件より $Q(\xi)$ が決定する。さらに式⑥において荷重項以外の部分で極が一致する条件より式⑫の未定定数が決定される。

以上のことから $\phi(\xi)$ の一般解は次式として得られる。

$$\phi(\xi) = H(\xi) + \frac{1}{2\chi} \sum \frac{\overline{A_k} B_k}{\xi_k - \xi} \left[1 + \frac{\chi(\xi)}{\chi(\xi_k)} \right] + \frac{1}{2\chi} \sum \frac{A_k \overline{B_k} \xi_k'^2}{\xi_k' - \xi} \left[1 - \frac{\chi(\xi)}{\chi(\xi_k')} \right] \quad \dots\dots ⑬$$

ここに、 $A_k = \phi'(\xi_k')$, $B_k = E_k / \omega'(\xi_k')$ であり、 A_k は式⑪より荷重条件を定めた後 $2n$ 元1次の連立方程式を解くことにより決定される。

【4. 計算例】 図-2に示すクラックを有する半無限板において、L上で $m = p = 0$, M上で $m = \partial w / \partial x = 0$ としSimple Supportの条件を与える。荷重条件として無限遠方での集中ねじりモーメント T を考える。これはSimple Supportが傾き、そのときのねじりモーメントの反力が T の場合に相当する。図-3-aにクラック発生前の応力分布図を示す。Simple Support両端において応力集中が見られる。図-3-bにクラック発生後（クラック長 $b/a = 0.4$ ）の応力分布図を示した。

