Ⅰ-99　差分方程式による直交異方性板の曲げ解析

黒沢尻工業高校　正員　○安彦敏郎
岩手大学工学部　正員　宮本　裕
北海道大学工学部　正員　渡辺　昇

本報告は、直交異方性板の微分方程式から差分方程式を導き、数値解析を行い、その結果を、級数解および有限要素法による値と、比較検討したものである。

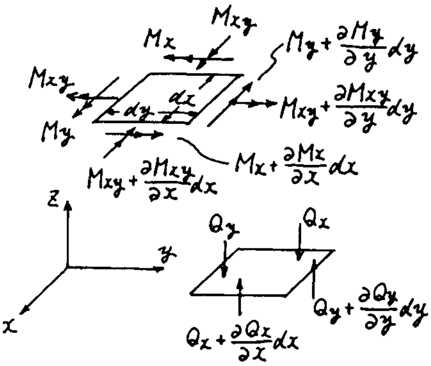
１．直交異方性板の微分方程式

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12}, \quad B = (\nu_y D_x + \nu_x D_y + 4D_{xy})/2$$



図－１

２．方程式の係数

式（１）を差分化して得られる方程式の係数は、次のようになる。

		D_y		
	$2B$	$-4(B+D_y)$	$2B$	
D_x	$-4(B+D_x)$	$6(D_x+D_y)+8B$	$-4(B+D_x)$	D_x
	$2B$	$-4(B+D_y)$	$2B$	
		D_y		

$= (p_z)_{m,n}\ \lambda^4 \quad \cdots\cdots (2)$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$

３．境界条件の処理および計算法

x ＝constantである辺の境界条件は、次のようになる。

（１）単純支持辺　$w=0, M_x=0$　（２）固定辺　$w=0, \theta=0$　（３）自由辺　$M_x=0, V_x=0$

また、板の形状および載荷状態が、ｘ軸およびｙ軸について対称である場合は、板の１／４について、計算を行う。

これらのことから、境界条件処理および対称軸処理を行い、５７種類の差分式を誘導する。次に、板を分割幅λで分割し、これらの各点に、誘導した式をあてはめることにより、連立方程式が得られ、これを解くことにより、変位が求められる。

固定辺

D_y		
$-4(B+D_y)$	$2B$	
$7D_x+6D_y+8B$	$-4(B+D_x)$	D_x
$-4(B+D_y)$	$2B$	
D_y		

$= (p_z)_{m,n}\ \lambda^4 \quad \cdots\cdots (3)$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$

単純支持辺

D_y		
$-4(B+D_y)$	$2B$	
$5D_x+6D_y+8B$	$-4(B+D_x)$	D_x
$-4(B+D_y)$	$2B$	
D_y		

$= (p_z)_{m,n}\ \lambda^4 \quad \cdots\cdots (4)$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$

４．数値計算例

（１）中央点に集中荷重Ｐが作用する正方形の周辺固定等方性板（図－２）

ここで、$P=1kg(9.8N)$, $a=150cm$, $t=0.1cm$

$E_x=E_y=2.1X10^6 kg/cm^2(2.058X10^7 N/cm^2)$, $\nu_x=\nu_y=0.3$

$G_{xy}=8.08X10^5 kg/cm^2(7.918X10^6 N/cm^2)$, $\lambda=25cm$とする。

各点のたわみは、表－１のとおりである。

（２）板全面に等分布荷重ｐが作用する正方形の周辺固定等方性板

ここで、$p=0.000785kg/cm^2(0.00769N/cm^2)$他は（１）と同様である。

中央点のたわみは、表－２のとおりである。

（３）板全面に等分布荷重ｐが作用する正方形の周辺単純支持等方性板。ここで、支持条件以外は（２）と同様である。

中央点のたわみは、表－３のとおりである。

（４）中央点に集中荷重Ｐが作用する正方形の周辺固定直交異方性板

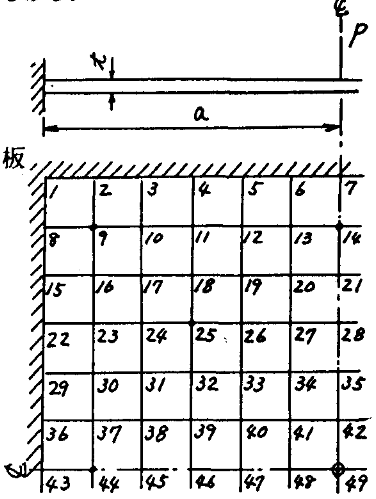
ここで、$P=1kg(9.8N)$, $a=150cm$, $t=0.775cm$

$E_x=1.359X10^5 kg/cm^2(1.332X10^6 N/cm^2)$

$E_y=3.96X10^4 kg/cm^2(3.88X10^5 N/cm^2)$, $\nu_x=\nu_y=0.2$

$G_{xy}=5.66X10^3 kg/cm^2(5.55X10^4 N/cm^2)$, $\lambda=25cm$とする。

各点のたわみは、表－４のとおりである。



図－２

表－１　w(cm)

節点	9	14	25	44	49
差分法	0.0089	0.199	0.604	0.199	2.840
ＦＥＭ	0.0086	0.174	0.580	0.175	2.667
級数解	0.0090	0.173	0.574	0.173	2.600

表－２　w_θ(cm)

差分法	44.27
級数解	41.67

表－３　w_θ(cm)

差分法	134.24
級数解	134.24

表－４　w(cm)

節点	25	28	46	49
差分法	0.0364	0.0678	0.679	0.1943
ＦＥＭ	0.0375	0.0684	0.0684	0.1911

５．まとめ

載荷状態および支持状態により異なるが、ＦＥＭおよび級数解との誤差は０～９％であった。ＦＥＭは、自由度＝節点×３であるから、この例では、（４９×３）元の、連立方程式となるが、差分法では、４９元の小マトリックスとなり、パソコンでも、解析が可能である。

なお、ＦＥＭは、参考文献（２）のプログラムを用いた。また、級数解は、参考文献（３）の公式を用い計算を行った。

６．参考文献

（１）Rudolph Szilard: Theory and Analysis of Plates, classical and numerial methods, Prentice-hall, inc

（２）辻野司：接着木質パネルの曲げ剛性（第１報），剛性マトリックスの妥当性について、木材学会誌 Vol.26　No.6　p.394～399（1980）

（３）土木学会、構造力学公式集

（４）宮本裕、安彦敏郎：差分方程式による周辺固定直交異方性板の解析、土木学会東北支部技術研究発表会講演概要(1986)