

宇都宮大学工学部 正員 ○中島章典、阿部英彦
東北大学工学部 正員 倉西 茂

1. はじめに

軸圧縮力を受ける柱など、座屈を生じさせるまでは大きくない静的荷重作用下の構造物の動的破壊の1つに、動的荷重を受けている間に構造物の静的不安定性と材料の塑性化が要因となって破壊が起こる場合がある¹⁾。本研究では、静的不安定性を有する構造物として最も基本的な1自由度系を対象とし、この種の動的破壊のメカニズムを明らかにするため、解析的考察を行い、さらに数値計算による検討を加えたものである。

2. 静的不安定性を有する1自由度振動モデルの弾塑性応答

図1に示す、鉛直方向の静的荷重 P が作用している質点(質量 m)、剛棒(長さ l)、回転ばね(ばね定数 k)よりなる振動系に水平方向の動的荷重が作用する場合の運動を考える。粘性減衰および幾何学的非線形性の影響を無視すれば、運動方程式は次式のようになる。

$$l \ddot{m}x + R(\theta) - Px = l f(t) \quad (1)$$

ここに、 $R(\theta)$ は回転ばねの復元力であり、この復元力特性が図2に示す完全弾塑性型であるとし、正の方向に塑性化した状態を考えれば、ばねの復元力は、

$$R(\theta) = R_y - k(\theta_m - \theta) \quad (2)$$

と表される。ここに、 R_y は降伏復元力、 θ_m は基準塑性回転角である。 $P = \alpha k / l$ 、 $\theta = x / l$ の関係をを用い、式(2)を式(1)に代入し整理すれば、

$$m \ddot{x} + (k/l^2) \{x_y - x_m + (1-\alpha)x\} = f(t) \quad (3)$$

となる。ここに、 α は静的荷重の座屈荷重に対する比を与える。上式の第2項は系の復元力(静的荷重の影響を含む)を表すが、これを $R'(x)$ として、この復元力特性を示すと図3のようになる。この図の除荷経路BCにおける復元力 R'_1 、 R'_2 は、負側の R'_2 の方が大きく、また斜線部①、②で示される弾性ひずみエネルギーも②の方が大きい。弾性ひずみエネルギー①、②の差を E_d として示せば、

$$E_d = 4\alpha(x_m - x_y)E_y/x_y \quad (4)$$

となる。ここに、 E_y は降伏エネルギー($=k\theta_y^2/2$)である。動的外力によるエネルギー入力定常的であり、振動系が一方に塑性化した状態を考えれば、振動系が塑性化した方向に変形しやすいことを意味している。また、この変形のしやすさの度合を示す E_d は式(4)より、塑性変位 x_m 、静的荷重比 α の増加につれて大きくなることわかる。

ところで、図1に示す振動系のエネルギーのつり合い式は、

$$E_k + E_s + E_h = E_f \quad (5)$$

となる。ここに、 E_k 、 E_s 、 E_h および E_f はそれぞれ運動エネルギー、弾塑性ひずみエネルギー、履歴減衰エネルギーおよび動的外力によるエネルギー入力である。図4に系の復元力特性を再び示すが、降伏後の経路ABの延長線が x 軸と交わるD点において復元力はゼロとなる。これは、弾塑性ひずみエネルギー E_s には領域OADで囲まれる上限値 E_{su} が存在し、D点を越えて変位する場合には E_s はしだいに減少し、この E_s の減少分は質点の運動エネルギー E_k として消費されるため、振動系の応答は急激に発散し動的破壊に至ると考えられる。したがって、D点は1つの限界変位と考えられ、これは経路ABが x 軸と交わる点として求められる。これを x_{cr} とすれば、

$$x_{cr} = x_y / \alpha \quad (6)$$

となり、系に作用する静的荷重 P と変位とのなすモーメントが回転ばねの降伏復元力 R_y に等しくなる変位に一致する。また、弾塑性ひずみエネルギーの上限値 E_{su} は、図4の領域OADの面積として、

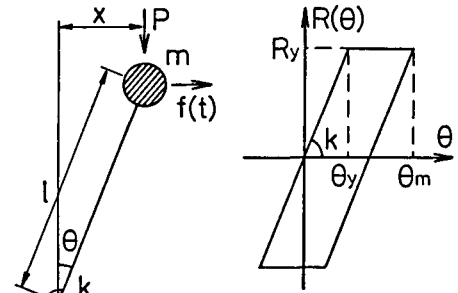


図2 回転ばねの復元力特性

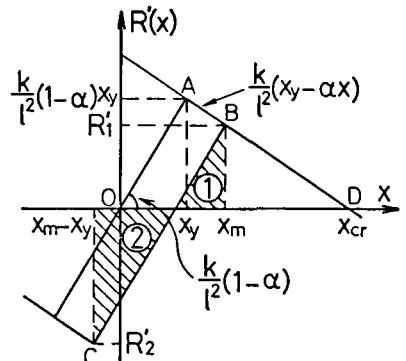


図3 系の復元力特性

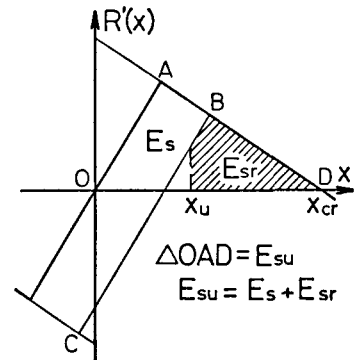


図4 復元力特性のエネルギー的考察

$$E_{su} = E_y (1 - \alpha) / \alpha \quad (7)$$

となり、 E_{su} は E_y によって無次元化すれば、静的荷重比のみの関数になる。

図1の振動系において、式(5)のエネルギーのつり合い式を参照すれば、動的外力によるエネルギー入力 E_r から、履歴減衰エネルギー E_h および限界変位 x_{or} に達したときに質点が有している運動エネルギー E_k を差し引いたエネルギー入力が E_{su} よりも大きければ、振動系が動的破壊に至ることになる。

そこで、図4に示す限界変位 x_{or} までには達しない過渡状態の任意の時刻において、一般に質点の速度はゼロではなく、ある運動エネルギー E_k が存在する。この E_k が図4の斜線領域のひずみエネルギー E_{sr} よりも大きければ、この時刻以降動的な外力によるエネルギー入力がない場合でも、質点の変位は限界変位に達し動的破壊に至る。このときの変位を x_u とすれば、 x_u は一般に限界変位 x_{or} よりも小さい。このことは、 x_{or} に達する以前に実質的な動的終局状態が存在することを意味する。この終局状態をエネルギー的に考察すれば、 x_{or} に達したときには、運動エネルギーはゼロよりわずかに大きければ動的破壊に至ることになるから、動的終局変位 x_u は動的な外力によるエネルギー入力 E_r より履歴減衰エネルギー E_h を差し引いた有効エネルギー入力 E_{er} が E_{su} よりも大きくなった状態における変位として求められる。以上の関係を式に表せば次のようになる。

$$E_{su} = E_s + E_{sr} \leq E_s + E_k = E_r - E_h = E_{er} \quad (8)$$

3、数値計算

前項に述べたように、ある時刻以降動的な外力が作用しない場合においても、変位が発散して崩壊に至る始めの時刻の状態を実質的な動的終局状態として、この時刻の応答量を数値計算によって求める。

共振振動数を持つ正弦波外力を受ける振動系において、正弦波外力の加速度振幅 Z は次式で示される降伏強度係数 γ を用いて表す。

$$\gamma = R_y / (Z \ell m) \quad (9)$$

図5は、静的荷重が作用しない場合の固有振動数 $n=5\text{Hz}$ 、静的荷重比 $\alpha=0.5$ および $\gamma=50$ の場合の質点の変位応答曲線(C_0)である。任意の時刻以降動的な外力が作用しない場合には、変位が発散しているが(C_1)、この時刻の1時間刻みだけ前より動的な外力が作用しない場合には、変位は発散していない(C_2)。したがって、この任意の時刻の状態が動的終局状態となる。

図6は、動的終局状態の変位 x_u と降伏強度係数 γ との関係を示したものである。縦軸が変位 x_u を限界変位 x_{or} で無次元化して表し、横軸が γ である。○、●、△がそれぞれ静的荷重比 $\alpha=0.25, 0.5, 0.75$ の場合である。一般に、 γ が大きくなるにつれて、 x_u は x_{or} に近づくが、 x_{or} よりは小さいことがわかる。

また、図7には、動的終局状態までに動的な外力によるエネルギー入力 E_r とこれより履歴減衰エネルギーを差し引いた有効エネルギー入力 E_{er} の γ との関係を示している。縦軸が E_{su} によって無次元化されたエネルギー入力であり、横軸は γ である。 α が小さいほどエネルギー入力が履歴減衰エネルギーによって失われる傾向が大きく、この傾向は γ が小さいほど顕著である。しかし、 E_{er} はすべて1.0すなわち E_{su} に等しいかわずかに大きいことがわかる。つまり、有効エネルギー入力 E_{er} が E_{su} に達したときに動的終局状態に至ることが数値計算によっても確かめられる。

最後に、この研究は科学研究費(奨励研究)の補助を受けたことを付記する。

参考文献 1) 倉西・中島: 土木学会論文集, No. 341, pp. 41-49, 1984, 1

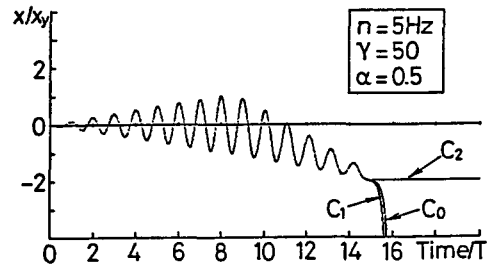


図5 正弦波外力に対する変位応答曲線

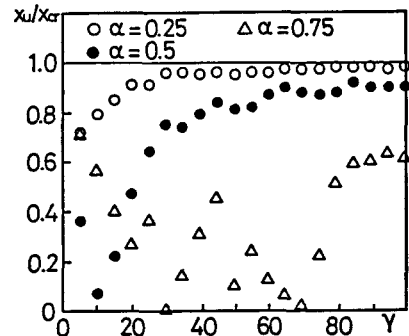


図6 動的終局状態の変位

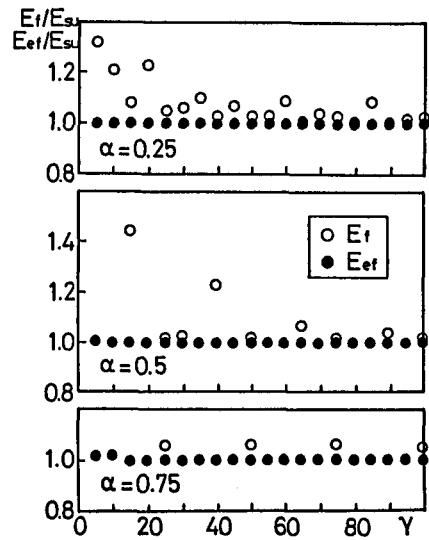


図7 正弦波外力によるエネルギー入力