

## I-40

## 異方性材料の降伏条件について

秋田大学

正員

長谷部 薫

秋田県工業技術センター

福田 助直

秋田大学

正員

薄木 征三

## 1. まえがき

金属などの等方性材料がいろいろな組合せ荷重を受ける場合の降伏条件は、Von Mises や Tresca によって与えられており、平面応力状態においては Mises の降伏条件の方が各種の金属材料に対する実験値によく合うとされている。また、塑性変形によって等方性であった金属は異方性を示すようになるが、この異方性材料の降伏条件は R.Hill によって論じられている。しかしながら、直交異方性材料の木材を考えた場合、木材の応力-ひずみ曲線は圧縮側と引張側で著しい相違を示し、針葉樹の杉の場合引張強度は圧縮強度の2倍位となり、木材に対してはこれらを考慮した降伏条件が必要となる。本報告では、直交異方性材料の降伏条件を用いて、平面応力状態における木材に対する降伏曲線を示すものである。

## 2. 降伏条件

直交異方性材料に対する降伏条件は、Tsai と Wu<sup>1)</sup>によって次式のようにテンソル表示で与えられており、Hill の降伏条件より方程式の項が多くなっている。

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad \text{----- (1)}$$

ここで、図-1の座標系に対して木材の繊維方向を  $z$  とすると

$$\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z, \sigma_4 = \tau_{yz}, \sigma_5 = \tau_{zx}, \sigma_6 = \tau_{xy} \quad \text{----- (2)}$$

であり、 $F$  は異方性パラメーターである。

図-2は、木材の一般的な応力-ひずみ曲線であり、引張と圧縮の場合で著しい相違を示す。材料により異なるが、引張強度 $\sigma_t$ と圧縮強度 $\sigma_c$ の比は2~3であり、木材に対してはこれらを考慮した降伏条件が必要である。Put<sup>2)</sup>とZakic<sup>3)</sup>は、式(1)の降伏条件が木材に適用できることを示している。 $x$ - $z$  面内の応力を受ける場合 $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ となるので、式(1)は次式のように簡単化される。

$$F_1 \sigma_x + F_3 \sigma_z + F_5 \tau_{zx} + F_{11} \sigma_x^2 + F_{33} \sigma_z^2 + F_{55} \tau_{zx}^2 + 2F_{13} \sigma_x \sigma_z = 1 \quad \text{----- (3)}$$

ここで、繊維に垂直方向の応力は小さいものとして無視すると $\sigma_x = 0$ となるので、式(4)のように繊維に平行な直応力とせん断応力だけとなる。

$$F_3 \sigma_z + F_5 \tau_{zx} + F_{33} \sigma_z^2 + F_{55} \tau_{zx}^2 = 1 \quad \text{----- (4)}$$

## 3. 異方性パラメーターの決定

1軸方向荷重が作用するとき、繊維に平行な引張強度を $\sigma_t$ 、繊維に平行な圧縮強度を $\sigma_c$ （負の値）とすると、引張荷重だけが作用する場合式(4)より

$$F_3 \sigma_t + F_{33} \sigma_t^2 = 1 \quad \text{----- (5)}$$

となる。また、圧縮荷重だけが作用する場合

$$F_3 \sigma_c + F_{33} \sigma_c^2 = 1 \quad \text{----- (6)}$$

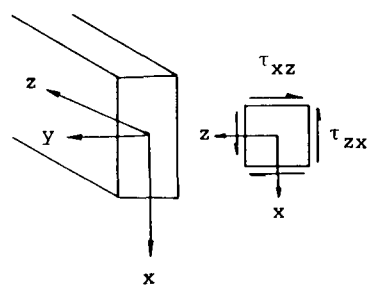


図-1

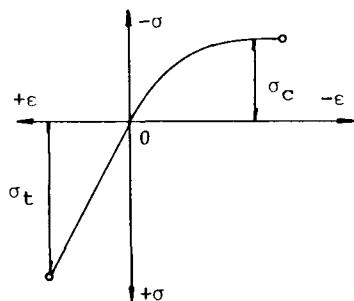


図-2 応力-ひずみ曲線

となり、式(5)と(6)より次式が得られる。

$$F_3 = \frac{1}{\sigma_t} + \frac{1}{\sigma_c}, \quad F_{33} = -\frac{1}{\sigma_t \sigma_c} \quad \text{----- (7)}$$

純せん断応力状態の場合、繊維に平行なせん断強さは圧縮側と引張側で同じ値となり ( $\tau_y = \tau_t = -\tau_c$ )、式(7)を導いたのと同様にして

$$F_5 = \frac{1}{\tau_t} + \frac{1}{\tau_c} = 0, \quad F_{55} = \frac{1}{\tau_y^2} \quad \text{----- (8)}$$

となる。材料試験を行い  $\sigma_t$ 、 $\sigma_c$ 、 $\tau_y$  を求めると異方性パラメーター  $F$  を決定することができる。 $F_3$  は引張と圧縮強度の差異の影響を表すのに用いられ、Hill の降伏条件には見られない項である。

式(7)、(8)を式(4)に代入すると

$$\frac{\{\sigma_z - (\sigma_t + \sigma_c)/2\}^2}{\left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{2}\right)^2} + \frac{\tau_{zx}^2}{\left\{\frac{(\sigma_t - \sigma_c)\tau_y}{2} \sqrt{-\frac{1}{\sigma_t \sigma_c}}\right\}^2} = 1 \quad \text{----- (9)}$$

となるので、直交異方性材料に対する降伏条件は図-3に示す楕円形の降伏曲線となる。

#### 4. 実験結果

表-1は、秋田杉を用いた木製電柱の、材料試験から得られた  $\sigma_t$ 、 $\sigma_c$  および  $\tau_y$  の平均値を示している。引張強度  $\sigma_t$  は 433 ~ 816 kg/cm<sup>2</sup>、圧縮強度  $\sigma_c$  は 254 ~ 380 kg/cm<sup>2</sup>、またせん断強度  $\tau_y$  は 44 ~ 85 kg/cm<sup>2</sup> とかなりばらついた結果となっている。これらを式(9)に代入し No.1~4 の供試体に対する降伏条件を図-4に示す。

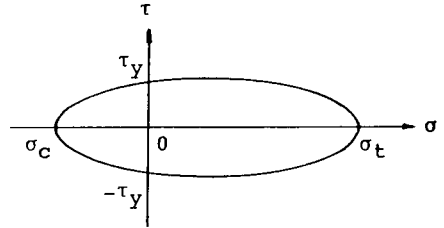


図-3 降伏条件

表-1 杉の機械的性質

| 試験体<br>No. | 圧縮強度 $\sigma_c$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | 引張強度 $\sigma_t$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | せん断強度 $\tau_y$<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) |
|------------|------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1          | 336                                      | 816                                      | 82                                      |
| 2          | 303                                      | 547                                      | 85                                      |
| 3          | 254                                      | 442                                      | 66                                      |
| 4          | 360                                      | 625                                      | 76                                      |
| 5          | 282                                      | 433                                      | 56                                      |
| 6          | 301                                      | 510                                      | 79                                      |
| 7          | 380                                      | 674                                      | 47                                      |
| 8          | 350                                      | 726                                      | 44                                      |
| 平均         | 321                                      | 597                                      | 67                                      |
| 標準偏差       | 40                                       | 129                                      | 15                                      |
| 変動係数       | 0.1246                                   | 0.2161                                   | 0.2239                                  |

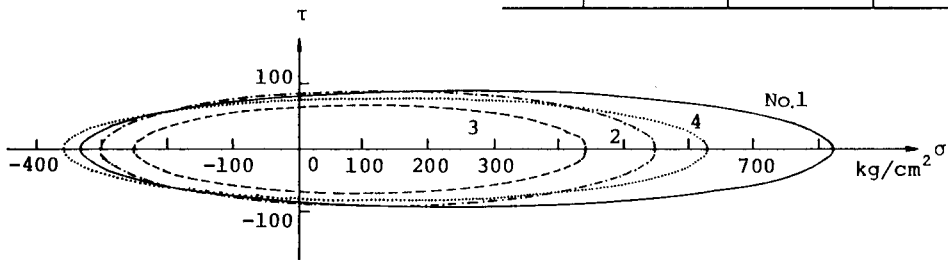


図-4 降伏条件

#### 参考文献

- 1) Tsai, S. M., and E. M. Wu : A general failure criterion for anisotropic materials, Journ. of Composite materials, 1971
- 2) Put, T. A. C. M. van der : A general failure criterion for wood, Proceedings of IUFRO, 1982
- 3) Zakic, B. D : Shearing failure in plastic bending of wood beams, Holzforschung und Holzverwertung 36, 1984