I-33　変位・圧力・流速を変数とする多次元圧密問題の一解析過程

東京工業大学　学生員　○佐々木　隆
東京工業大学　正　員　吉　田　裕
東京工業大学　正　員　依知川　哲治

１．はじめに

有限要素法による多次元圧密問題の解析は、Biot[1)]の方程式系を対象として力のつりあい方程式と流速を消去した形の連続条件式に基づいて構成されるのが一般的である。圧密現象は土の骨格変形と間隙水の流れとの連性問題であるから、流れの場を把握することは現象の解明に重要な意味を持つ。本文は、新たに構成した変位・流速・間隙水圧を変数とする多次元圧密問題の簡潔な解析法について報告するものである。

２．基礎方程式とその空間に関する離散化

多次元圧密問題に関するBiot[1)]の方程式系は２次元問題を対象とした場合には次のように与えられる。方程式(1)は力のつりあい式、(2)はダルシー則、(3)は連続条件式である。

$$\frac{\partial(\sigma'_x-p)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\rho b_x=0,\qquad \frac{\partial(\sigma'_z-p)}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\rho b_z=0 \quad\cdots(1)$$

$$q_x=-\frac{k_x}{\gamma_w}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}-\rho_w b_x\right\},\qquad q_z=-\frac{k_z}{\gamma_w}\left\{\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_w b_z\right\} \quad\cdots(2)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=-\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=-\dot{\varepsilon}_v \quad\cdots(3)$$

σ'は有効応力、pは間隙水圧、qは間隙水の流速、ρb、$\rho_w b$は物体力であり、係数k_x, k_zは透水係数である。式(1)〜(3)を個々に離散化するものとする。例えば、式(2)に対応する重み付き残差式は次のように与えられるので

$$\iint_\Omega\left[\delta q_x\left(\frac{\gamma_w}{k_x}q_x\right)+\delta q_z\left(\frac{\gamma_w}{k_z}q_z\right)\right]d\Omega-\iint_\Omega\left[\frac{\partial(\delta q_x)}{\partial x}p+\frac{\partial(\delta q_z)}{\partial z}p\right]d\Omega$$
$$-\iint_\Omega\left[\delta q_x(\rho_w b_x)+\delta q_z(\rho_w b_z)\right]d\Omega-\int_{\Gamma_p}\left[\delta q_x(\bar{p}n_x)+\delta q_z(\bar{p}n_z)\right]d\Gamma=0 \quad\cdots(4)$$

離散化の過程で間隙水圧の空間に関する微分項を対象とする必要はない。したがって、ここでは最も簡単な要素として、三角形要素内で間隙水圧(p)を一定、変位(u)および流速(q)は線形分布の仮定に基づいて式(1)〜(3)のそれぞれを離散化する。得られる有限要素方程式は変数ベクトルを既知の成分と未知の成分とに分離 して次のように書くことができる。バー(￣)の付いている成分が既知である。[k],[M],[k_P]はそれぞれ剛性、透水係数、空間の勾配に関する係数マトリクスである。

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\\bar{u}_2\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}K_{P1}\\K_{P2}\end{bmatrix}\{P\}=\begin{Bmatrix}\bar{F}_1\\F_2\end{Bmatrix}\quad\cdots(5)$$

$$\begin{bmatrix}M_{33}&M_{34}\\M_{43}&M_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_3\\\bar{q}_4\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}K_{P3}\\K_{P4}\end{bmatrix}\{P\}=\begin{Bmatrix}\bar{Q}_3\\Q_4\end{Bmatrix}\quad\cdots(6)$$

$$\left[K_{P1}^T\ K_{P2}^T\right]\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\\dot{\bar{u}}_2\end{Bmatrix}+\left[K_{P3}^T\ K_{P4}^T\right]\begin{Bmatrix}q_3\\\bar{q}_4\end{Bmatrix}=\{0\}\quad\cdots(7)$$

この場合には間隙水圧が対象領域の境界上の変数とはならず間隙水の境界条件を直接与える必要はない。

３．有限要素方程式の解析過程

次のような時間積分公式を用いるものとする。

$$\dot{u}_1^{n+\alpha}=\frac{1}{\Delta t}\left(u_1^{n+1}-u_1^{n}\right),\quad u_1^{n+\alpha}=\alpha u_1^{n+1}+(1-\alpha)u_1^{n}\quad(0\le\alpha<1)\quad\cdots(8)$$

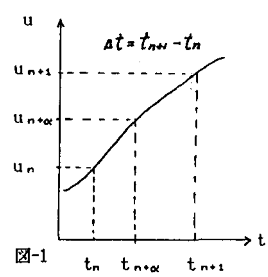

図-1

時間積分公式(8)を直接(5)、(6)、(7)に適用すると積分漸化式の係数マトリックスが非対称になる。したがって、変数ベクトルに係数を含ませて対称化を図ることにより、次のような積分漸化式(9)を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} -\alpha \Delta t K_{11} & 0 & K_{P1} \\ 0 & -M_{33} & K_{P3} \\ K_{P1}^{T} & K_{P3}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{\Delta t} u_1^{n+1} \\ -\alpha q_3^{n+1} \\ -\alpha p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)\Delta t K_{11} & 0 & K_{P1} \\ 0 & -M_{33} & K_{P3} \\ K_{P1}^{T} & K_{P3}^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{\Delta t} u_1^{n} \\ (1-\alpha) q_3^{n} \\ (1-\alpha) p^{n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{F}_1^{n+\alpha} - K_{12}\overline{u}_2^{n+\alpha} \\ \overline{Q}_3^{n+\alpha} - M_{34}\overline{q}_4^{n+\alpha} \\ K_{P2}^{T}\dot{\overline{u}}_2^{n+\alpha} + K_{P4}^{T}\overline{q}_4^{n+\alpha} \end{Bmatrix} \cdot (9)$$

式(9)は変位・流速・間隙水圧のすべてを変数とするもので、これをStep by Stepに解き進めることにより変位・流速・間隙水圧の空間および時間変化を一度に求めることができる。漸化式の係数の対角項に零成分があるが、変形コレスキー法で解き進める際には非零の項がフィル・インしてくるので問題はない。

4．数値解析例(α=0.5)

《1》図-2に示すような一次元圧密問題の解析結果を示す。載荷は図-3のように滑らかに立ち上げ計算の安定化を図っている。結果は何れもTerzaghiの解と比較しているが図-4は圧密度の時間変化、図-5は間隙水圧の等時曲線である。

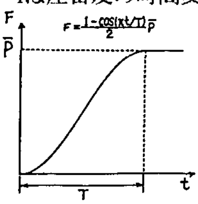

図-3 荷重の立ち上げ

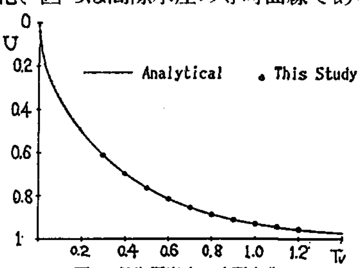

図-4 平均圧密度の時間変化

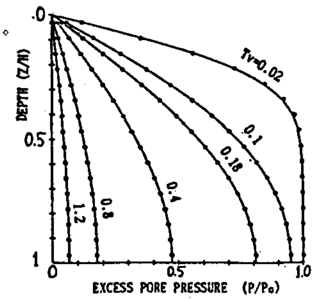

図-5 無次元化間隙水圧の等時曲線

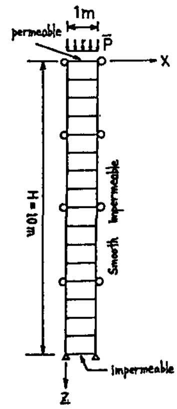

図-2 解析モデル

$k=1.0\times10^{-4}$ cm/s　E=10.0 kgf/cm²　ν=1/3　P=0.001 kgf/cm²

《2》Shiffmanら[2)]によって解析解が示されている半無限一様地盤が帯状載荷を受ける問題を、図-6に示す領域を設定して解析した結果を示す。図-7は過剰間隙水圧の時間変化をShiffmanらの解[2)]とともに表わしたものである。図-8,9,10はそれぞれ本法によって得られた変形図、流速ベクトル図、等過剰間隙水圧線図である

$k_x=k_z=5.0\times10^{-5}$ cm/s　E=20.0 kgf/cm²　ν=0　P=0.2 kgf/cm²

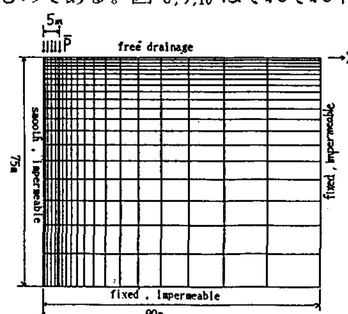

図-6 解析モデル

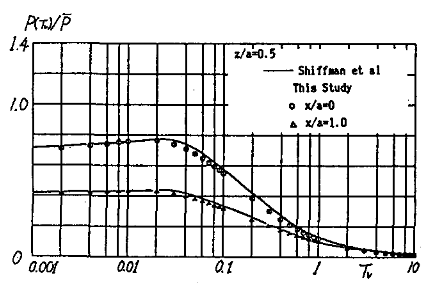

図-7 無次元化間隙水圧の時間変化

参考文献

1)M.A.Biot:General Theory of Tree-Dimensional Consolidation,J. of Appl. Phys., Vol.12,1941

2)R.L.Sciffman,A.T-F.Chen, and J.C.Jordan:An Analysis of Consolidation Theories, ASCE,Vol.95,SM1,1969

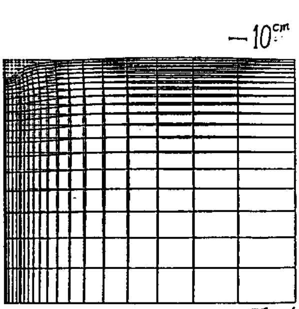

図-8 変形図　$T_v=1$

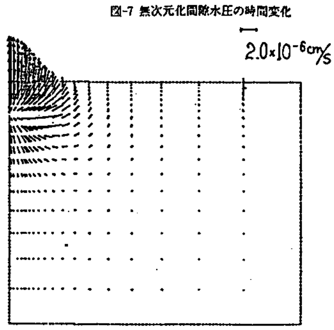

図-9 流速図　$T_v=1$

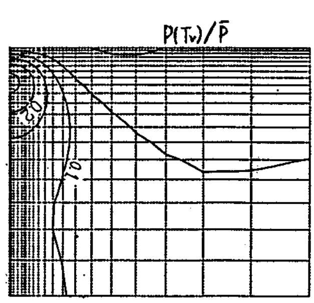

図-10 圧力分布　$T_v=1$