

I-31 対応原理による粘弾性厚板の解析

大阪工業大学 学生員 村上 英一
大阪工業大学 正員 堀川都志雄

1. はしがき

T.Alfrey¹⁾およびE.H.Lee²⁾等らによって開発されてきた対応原理は、ラプラス空間において線形弾性体の弾性定数と粘弾性体の定数とを関連づけ弾性解を利用するもので、線形粘弾性体の準静的解を得る有効な手段となっている。塩屋ら³⁾は有限要素法と組み合わせることによって、原子力圧力容器のクリープ解析を行い、またA.K.Raoら⁴⁾は、等分布荷重を受ける粘弾性厚板問題を取上げ、Kelvin, Maxwellおよび三要素モデルからなる厚板の数値結果を発表している。

本研究では、全周単純支持された粘弾性厚板に自重が作用する場合の解析を行い、Kelvinおよび三要素モデルにおける緩和時間の変位と応力に与える影響を調べる。

2. 線形弾性厚板の級数解

物体力を考慮したGalerkin vector f_3 とBoussinesqの関数 θ_3 を用いて、自重を受ける厚板の解析は以下のように示される。

$$\Delta \Delta f_3 = -\rho / (1 - \nu) \quad , \quad \Delta \theta_3 = 0 \quad (1)$$

ここで、 ρ : 物体力および密度 , ν : ポアソン比

また、変位 u, v, w と変位関数との関係を示すと、

$$\begin{aligned} 2\mu u &= -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3 \quad , \quad 2\mu v = -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3 \\ 2\mu w &= 2(1 - \nu) \Delta f_3 - \partial_z^2 f_3 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 μ : せん断弾性係数

Hookeの法則と式(2)から、応力 σ_x 等は容易に得られる。

厚板の上・下面の境界条件を考慮すれば、例えば自重問題における板中央面でのたわみ w_m および下面の応力 σ_y^1 の級数解は次のようになる。

$$\begin{aligned} 2\mu w_m &= \sum_n \sum_n \left[\left(2 - \frac{\xi \operatorname{ct} \xi + 1}{D_n \operatorname{ch} \xi} \right) + \frac{2\nu}{D_n \operatorname{ch} \xi} \right] \frac{\bar{\rho}}{\gamma^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_n y \\ \sigma_y^1 &= - \sum_n \sum_n \left[1 + \nu \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \right] \frac{2\bar{\rho}}{D_n} \operatorname{tn} \xi \frac{\beta_n^2}{\gamma^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 a, b : x, y 方向のスパン , h : 板厚 , $\alpha_n = n\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, $\gamma^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2$,
 $\xi = \gamma h/2$, $\operatorname{tn} \xi = \tanh \xi$, $\operatorname{ch} \xi = 1/\operatorname{tn} \xi$, $D_n = \xi (\operatorname{ct} \xi - \operatorname{tn} \xi) - 1$, $\bar{\rho} : \rho$ のフーリエ係数

3. 対応原理による粘弾性厚板のたわみと応力

等方弾性体の応力およびひずみの関係をテンソル表示すれば、次のように示される。

$$S_{ij}(t) = 2\mu e_{ij}(t) \quad , \quad \sigma_{kk}(t) = 3K e_{kk}(t) \quad (4)$$

ここで、 S_{ij} , e_{ij} : 応力およびひずみの偏差応力 , K : 体積弾性率

一方、線形粘弾性体に対する微分形式の構成則が次式で与えられるとすれば、

$$P_1(D) S_{ij}(t) = Q_1(D) e_{ij}(t), \quad P_2(D) \sigma_{kk}(t) = Q_2(D) e_{kk}(t) \quad (5)$$

ここで、 $P_1(D) \sim Q_2(D)$: 微分演算子 $D (= \partial / \partial t)$ の多項式

応力およびひずみの初期条件をすべて零と仮定すると、ラプラス変換後の式(4)と(5)の対応から弾性定数間には、次の関係式が成立する。

$$2\mu(s) = Q_1(s) / P_1(s), \quad 3K(s) = Q_2(s) / P_2(s) \quad (6)$$

式(3)と(6)より、粘弾性厚板のたわみと応力は合成積を用いて次のように得られる。

$$w_n = \sum_n \sum_n \left[\left(2 - \frac{\xi \cot \xi + 1}{D_n \operatorname{ch} \xi} \right) T_1 + \frac{2}{D_n \operatorname{ch} \xi} T_2 \right] \frac{1}{\gamma^2} \sin \alpha_n x \sin \beta_n y$$

$$\sigma_y^I = - \sum_n \sum_n \left[S_1 + \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} S_2 \right] \frac{2}{D_n} \operatorname{th} \xi \frac{\beta_n^2}{\gamma^3} \sin \alpha_n x \sin \beta_n y \quad (7)$$

ここで、

$$T_1 = \int_0^t p(t-\tau) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\mu(s)} \right\} d\tau, \quad T_2 = \int_0^t p(t-\tau) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\nu(s)}{2\mu(s)} \right\} d\tau$$

$$S_1 = \mathcal{L}^{-1} \{ p(s) \}, \quad S_2 = \int_0^t p(t-\tau) \mathcal{L}^{-1} \{ \nu(s) \} d\tau$$

4. 数値計算例

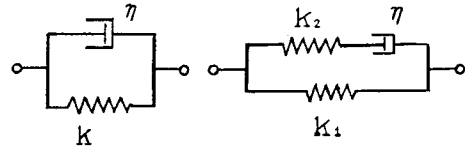
図-1に示される2つの粘弾性モデルからなる全周単純支持された正方形厚板の自重問題を取り上げる。板中央点における数値結果を表-1および2に示す。各モデルに対する構成則(5)は次のように表され、形状変化のみに粘性効果を有しているものと仮定する。

a. Kelvinモデル

$$\sigma = k \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

b. 三要素モデル

$$\eta \frac{d\sigma}{dt} + k_2 \sigma = (k_1 + k_2) \eta \frac{d\varepsilon}{dt} + k_1 k_2 \varepsilon$$



a. Kelvinモデル

b. 三要素モデル

図-1 粘弾性モデル

表-1 たわみ $w_n \mu / qa$ の比較

h/a	モデル	$t' = 0.1$	0.5	1.0	∞
0.1	a	3.813	9.897	13.13	17.95
	b	11.55	13.74	15.44	17.95
0.2	a	0.507	1.367	1.852	2.578
	b	1.626	1.950	2.203	2.578

表-2 応力 σ_y^I / qa の比較

h/a	モデル	$t' = 0.1$	0.5	1.0	∞
0.1	a	15.25	28.20	28.86	28.87
	b	26.03	27.47	28.29	28.87
0.2	a	3.864	7.146	7.313	7.317
	b	6.597	6.962	7.170	7.317

注) $q = \rho h$, $t' = t / \tau$, $\tau = k / \eta$, $k = 2\mu$, $k_1 = k_2 = k$

5. あとがき

連続版等に対しても同様の手法を用いることにより、解析できるものと思われる。

参考文献

- 1) T. Alfrey: Non-homogeneous stresses in visco-elastic media, Quart., Appl., Math., 2, 1944.
- 2) E.H. Lee: Stress-analysis in visco-elastic bodies, Quart., Appl., Math., 13, 1955.
- 3) 塩屋繁松 他: 有限要素法を用いた原子炉圧力容器のクリープ解析, コンクリートジャーナル, Vol. 12, No. 6, 1974.
- 4) A.K. Rao et.al.: Flexure of thick rectangular visco-elastic plates, Pros., ASCE, Vol. 98, No. EM3, June, 1972.