I-30　横等方性厚板の平面及び一般化平面応力解について

北見工業大学　正員　奥村　勇

1．まえがき　３次元弾性問題の発展は著しく，最近では，異方性体に関する３次元応力問題或いは異方性厚板の曲げに関する研究などが幾つか報告されている。前々回，著者は，横等方性体の３次元弾性問題に関する一つの解を報告したが，今回は，その解を用いて，横等方性厚板の平面応力解及び一般化平面応力解を求めたので報告する。

2．平面応力解　板厚はｈとし，円柱座標（ｒ，θ，ｚ）の原点を板の中央面或いはその延長上に置く。前々回報告した横等方性体の３次元弾性解に含まれる変位ポテンシャルを次の様に置く（$\psi=\vartheta_3$）。

$$\phi_{01}=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{D_m^{(1)}r^m+D_m^{(3)}[\frac{r^{m+2}}{2(m+1)}-\frac{r^m z^2}{\nu_1}]\}+\sum_{m=2}^{\infty}\cos m\theta\ \{D_m^{(2)}r^{-m}-D_m^{(4)}[\frac{r^{-m+2}}{2(m-1)}+\frac{r^{-m}z^2}{\nu_1}]\} \quad\cdots(1)$$

$$\phi_1=\sum_{m=0}^{\infty}F_m^{(1)}\cos m\theta\ [\frac{r^{m+2}}{2(m+1)}-\frac{r^m z^2}{\nu_2}]-\sum_{m=2}^{\infty}F_m^{(2)}\cos m\theta\ [\frac{r^{-m+2}}{2(m-1)}+\frac{r^{-m}z^2}{\nu_2}] \quad\cdots(2)$$

$$\psi=\sum_{m=0}^{\infty}E_m^{(1)}\sin m\theta\ [\frac{r^{m+2}}{2(m+1)}-\frac{r^m z^2}{\nu_3}]+\sum_{m=2}^{\infty}E_m^{(2)}\sin m\theta\ [\frac{r^{-m+2}}{2(m-1)}+\frac{r^{-m}z^2}{\nu_3}] \quad\cdots(3)$$

ここで，ν_1及びν_2は，それぞれ，次式に示す２次方程式の２つの根，また，$\nu_3=c_{44}/c_{66}$であり，$D_m^{(1)}$から$E_m^{(2)}$は,未定定数である。更に,次式に含まれるc_{11}からc_{44}は,横等方性体の弾性定数である。

$$c_{11}c_{44}\nu^2+(c_{13}^2+2c_{13}c_{44}-c_{11}c_{33})\nu+c_{33}c_{44}=0 \quad\cdots(4)$$

式（1）から式（3）より求められる応力成分に，$\sigma_{zz}=0$，$\sigma_{\theta z}=0$ 及び $\sigma_{zr}=0$ の条件を課すると，例えば，未定定数$D_m^{(3)}$及び$E_m^{(1)}$については，次の関係を得る。

$$D_m^{(3)}=-(\frac{\nu_1}{\nu_2})F_m^{(1)}\{\frac{c_{13}}{c_{13}\nu_1-c_{33}k_1}[\nu_1\gamma_3+\nu_2(2\gamma_1-\gamma_2)]+(\gamma_1 m-\gamma_3)\} \quad\cdots(5.a)$$

$$E_m^{(1)}=(\frac{\nu_3}{\nu_2})F_m^{(1)}\{\frac{c_{13}(1+k_1)}{c_{13}\nu_1-c_{33}k_1}[\nu_1\gamma_3+\nu_2(2\gamma_1-\gamma_2)]+\gamma_2-\gamma_3\} \quad\cdots(5.b)$$

ここで，

$$k_1=\frac{c_{11}\nu_1-c_{44}}{c_{13}+c_{44}},\quad \gamma_1=\begin{cases}1 & [\nu_1=\nu_2]\\ 0 & [\nu_1\neq\nu_2]\end{cases};$$

$$\gamma_2=\begin{cases}\dfrac{2c_{11}\nu_2}{c_{11}\nu_2-c_{44}} & [\nu_1=\nu_2]\\ \dfrac{2\nu_2}{\nu_1-\nu_2}\cdot\dfrac{c_{11}\nu_1-c_{44}}{c_{11}\nu_2-c_{44}} & [\nu_1\neq\nu_2]\end{cases},\quad \gamma_3=\begin{cases}0 & [\nu_1=\nu_2]\\ \dfrac{2\nu_2}{\nu_1-\nu_2} & [\nu_1\neq\nu_2]\end{cases} \quad\cdots(6.a\sim d)$$

上に示した関係式を,３つの変位ポテンシャルから得られるそれぞれの変位成分及び応力成分に代入し,３つの解をそれぞれ加えれば，平面応力解が得られる。ｒに関する負のべき指数を持つ解は，正のべき指数を持つ解の m に −m を代入すれば得られるので省略し,正のべき指数を持つ解のみを示せば，例えば，次のとおりである。

$$u_r^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{D_m^{(1)}m r^{m-1}+F_m^{(1)}\gamma_5[\frac{r^{m+1}}{m+1}\{\gamma_6[\nu_1(m+2)-\nu_3 m(1+k_1)]-(m+2)+m\nu_3\nu_4\}+2k_1 m\gamma_6 r^{m-1}z^2]\} \quad\cdots(7)$$

$$u_z^{(3)}=4k_1\gamma_5\gamma_6\sum_{m=0}^{\infty}(-)F_m^{(1)}\cos m\theta\ r^m z \quad\cdots(8)$$

$$\sigma_{rr}^{(3)}=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{D_m^{(1)}m(m-1)(c_{11}-c_{12})r^{m-2}-F_m^{(1)}\gamma_5[r^m\{c_{11}(m+2)-c_{12}(m-2)$$
$$-\gamma_6[m(c_{11}-c_{12})\{\nu_1-\nu_3(1+k_1)\}+2\{\nu_1(c_{11}+c_{12})-2c_{13}k_1\}]$$
$$-m\nu_3\nu_4(c_{11}-c_{12})\}-2m(m-1)(c_{11}-c_{12})k_1\gamma_6 r^{m-2}z^2]\}\ \cdots\cdots(9)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)}=2c_{66}\sum_{m=0}^{\infty}(-)m\sin m\theta\ \{D_m^{(1)}(m-1)r^{m-2}-F_m^{(1)}\gamma_5[r^m\{1+\gamma_6[\nu_3(1+k_1)-\nu_1]$$
$$-\nu_3\nu_4\}-2(m-1)k_1\gamma_6 r^{m-2}z^2]\}\ \cdots\cdots(10)$$

ここで，
$$\gamma_5=\frac{c_{44}}{c_{11}\nu_2-c_{44}}\ ,\quad \gamma_6=\frac{c_{13}}{c_{13}\nu_1-c_{33}k_1}\ ,\quad \nu_4=\frac{c_{11}}{c_{44}}\ \cdots\cdots(11.a\sim c)$$

3．一般化平面応力解　前述した解に含まれる変位ポテンシャルを次の様に置く。

$$\phi_{03}=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{A_m^{(1)}r^m z+A_m^{(3)}[\frac{r^{m+2}}{2(m+1)}z-\frac{r^m}{3\nu_2}z^3]\}+\sum_{m=2}^{\infty}\cos m\theta\ \{A_m^{(2)}r^{-m}z$$
$$-A_m^{(4)}[\frac{r^{-m+2}}{2(m-1)}z+\frac{r^{-m}}{3\nu_2}z^3]\}\ \cdots\cdots(12)$$

$$\phi_3=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{C_m^{(3)}r^m z+C_m^{(1)}[\frac{r^{m+2}}{2(m+1)}z-\frac{r^m}{3\nu_1}z^3]\}+\sum_{m=2}^{\infty}\cos m\theta\ \{C_m^{(4)}r^{-m}z$$
$$-C_m^{(2)}[\frac{r^{-m+2}}{2(m-1)}+\frac{r^{-m}}{3\nu_1}z^3]\}\ \cdots\cdots(13)$$

$$\psi=\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{(1)}\sin m\theta\ r^m z-\sum_{m=2}^{\infty}B_m^{(2)}\sin m\theta\ r^{-m}z\ \cdots\cdots(14)$$

ここで，$A_m^{(1)}$ から $B_m^{(2)}$ は未定定数である。式（12）から式（14）より求められる応力成分に，$\sigma_{zz}=0$，$(\sigma_{\theta z})_{z=\pm h/2}=0$ 及び $(\sigma_{zr})_{z=\pm h/2}=0$ の条件を課すると，未定定数の間に次の関係を得る。

$$A_m^{(3)}=(\frac{\nu_2}{\nu_1})\ C_m^{(1)}\{\frac{c_{13}}{c_{13}\nu_2-c_{33}k_2}[\nu_1\gamma_3+\nu_2(2\gamma_1-\gamma_2)]-(3\gamma_1-\gamma_2)\}\ \cdots\cdots(15.a)$$

$$C_m^{(3)}=-A_m^{(1)}\frac{1+k_2}{k_2(\gamma_1-\gamma_2)}+\frac{h^2C_m^{(1)}}{4\nu_1k_2(\gamma_1-\gamma_2)}\{\frac{c_{13}(1+k_2)}{c_{13}\nu_2-c_{33}k_2}[\nu_1\gamma_3$$
$$+\nu_2(2\gamma_1-\gamma_2)]+\gamma_2-\gamma_3\}\ ,\quad B_m^{(1)}=-C_m^{(3)}(\gamma_1-\gamma_3)\ \cdots\cdots(15.b,c)$$

ここで，$k_2=(c_{11}\nu_2-c_{44})/(c_{13}+c_{44})$ である。上に示した未定定数の関係式を，３つの変位ポテンシャルより得られるそれぞれの変位成分及び応力成分に代入し，３つの解をそれぞれ加えれば，一般化平面応力解が得られる。r に関する正のべき指数を持つ u_r 及び $\sigma_{\theta z}$ を示せば，次のとおりである。

$$u_r^{(4)}=z\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\ \{A_m^{(1)}mr^{m-1}-C_m^{(1)}(\frac{\nu_2}{\nu_1})\ \gamma_5\ [\frac{m+2}{m+1}\ r^{m+1}(\nu_2\gamma_7-1)$$
$$-\frac{2m}{3}\ r^{m-1}z^2(\gamma_7-\nu_4)]\}\ \cdots\cdots(16)$$

$$\sigma_{\theta z}^{(4)}=\frac{c_{44}}{2}\ (\frac{\nu_2}{\nu_1})\ \gamma_5\ [\gamma_7(1+k_2)-\nu_4]\ (h^2-4z^2)\sum_{m=0}^{\infty}C_m^{(1)}m\sin m\theta\ r^{m-1}\ \cdots\cdots(17)$$

ここで，$\gamma_7=c_{13}/(c_{13}\nu_2-c_{33}k_2)$ であり，γ_5 及び ν_4 は，式（11.a,c）に示したものである。

4．あとがき　今回報告した横等方性厚板の平面応力解及び一般化平面応力解は，それ自体でも，横等方性厚板の面内問題或いは特殊な曲げの問題に応用することができる。また，これらの解を同次解として用いれば，円形厚板，円環厚板或いは扇形厚板のより一般的な曲げの問題を解析することができ，横等方性厚板の有用な一つの解と考える。r に関する負のべき指数を持つ解は，m=0 及び m=1 についての場合わけがなされ，それぞれ別な解となるが，それらについては省略した。