Ｉ-28　選点法を応用した４辺固定Mindlin板の固有値問題の解析

北海道大学工学部　学生員　大場　誠道
北海道大学工学部　正会員　三上　隆
北海道大学工学部　正会員　芳村　仁

１．はじめに

Mindlin板の固有値問題の解析は、境界条件によっては解析的取り扱いがしばしば困難となるため,有限要素法、有限帯板法及びRayleigh-Ritz法などの近似計算手法が用いられてる。本報告は、選点法とKantorovich法を併用する手法を、Mindlin板の自由振動問題及び座屈問題に適用し、その有効性を調べたものである。

２．基礎方程式

解析の対象とするMindlin板は、一様な圧縮応力を受ける等方等質で一様な厚さ（h）の矩形板（B×L）とする（図－１）。たわみをw,x及びy方向の回転角をψ_x，ψ_yと記せば,Mindlin板の運動方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\equiv D\left(\psi_x''/L^2 + \frac{1-\nu}{2}\psi_x^{\circ\circ}/B^2 + \frac{1+\nu}{2}\psi_y'^{\circ}/LB\right) + KGh\left(W'/L - \psi_x\right) - \frac{h^3}{12}\left(\rho\ddot{\psi}_x + \sigma_x^0\psi_x''/L^2\right) = 0 \\ L_2 &\equiv D\left(\frac{1-\nu}{2}\psi_y''/L^2 + \psi_y^{\circ\circ}/B^2 + \frac{1+\nu}{2}\psi_x'^{\circ}/LB\right) + KGh\left(W^{\circ}/B - \psi_y\right) - \frac{h^3}{12}\left(\rho\ddot{\psi}_y + \sigma_x^0\psi_y''/L^2\right) = 0 \\ L_3 &\equiv KGh\left(W''/L^2 + W^{\circ\circ}/B^2 - \psi_x'/L - \psi_y^{\circ}/B\right) - h\left(\rho\ddot{W} + \sigma_x^0 W''/L^2\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{---(1)}$$

ここに、$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$,K=せん断補正係数,ν＝ポアソン比，G=せん断弾性係数,ρ＝密度,( )' =∂( )/∂ξ,( ) =∂( )/∂η,( ) =∂( )/∂t

３．解析手順

先ず、式（１）を常微分方程式に変換する。そのため、ここでは、ξ＝０、ξ＝１で完全固定されたTimoshenko梁の振動形（たわみWと回転角ψ）を用いてKantorovich法を採用する。即ち,解を調和振動の前提のもとに

$$\left.\begin{aligned} w &= L\,W(\xi)\,f_1(\eta)\,e^{i\omega t} \\ \psi_x &= \Psi(\xi)\,f_2(\eta)\,e^{i\omega t} \\ \psi_y &= W(\xi)\,f_3(\eta)\,e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \text{-------------------------------(2)}$$

と表し、式（２）を式（１）に代入し、Kantorovich法

$$\int L_1 W(\xi)\,d\xi=0,\quad \int L_2 \Psi(\xi)\,d\xi=0,\quad \int L_3 W(\xi)\,d\xi=0 \quad \text{--------------------(3)}$$

を適用すると、$f_1(\eta)$～$f_3(\eta)$に関する次式の常微分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} a_1 f_1'(\eta) + a_2 f_2^{\circ\circ}(\eta) + a_3 f_2(\eta) + a_4 f_3^{\circ}(\eta) + k f_2(\eta) + \Omega^2 f_2(\eta) &= 0 \\ a_5 f_1^{\circ}(\eta) + a_6 f_2^{\circ}(\eta) + a_7 f_3^{\circ\circ}(\eta) + a_8 f_3(\eta) + k f_3(\eta) + \Omega^2 f_3(\eta) &= 0 \\ a_9 f_1^{\circ\circ}(\eta) + a_{10} f_1(\eta) + a_{11} f_2(\eta) + a_{12} f_3^{\circ}(\eta) + k f_1(\eta) + \Omega^2 f_1(\eta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------------(4)}$$

ここで、パラメータkとΩ^2は、

$$k=12(1-\nu^2)\times(B/h)^2\times\sigma_x^0/E\pi^2,\quad \Omega^2=\rho\omega^2L^2/G \quad \text{--------------------(5)}$$

次に、式（４）にshifted Legendre多項式の零点を選点とする選点法を適用すれば、内部選点での未知量を固有ベクトル｛δ_I｝とする次式が得られる[1),2)]。

$$[\alpha]\{\delta_I\} - k\,[I]\{\delta_I\} + \Omega^2\,[I]\{\delta_I\} = \{0\} \quad \text{---------------(6)}$$

解の精度の向上は、拡張Kantorovich法を用いてなされる。このとき、式（６）より得られる固有モードを試験関数とするKantorovich法により、先ず偏微分方程式を常微分方程式に変換し、それに選点法を適用する。以下、所要の精度で解がもとまるまで上述の手順を繰り返す。なお、常微分方程式の係数の評価に現われる積分は、sifted Legendre多項式の零点を分点とする補間型積分則を採用する。

４．数値計算例

数値例では、せん断補正係数$k=\pi^2/12$,ポアソン比$\nu=0.3$とした。なお,選点法とKantorovich法の組合せよりなる繰り返し計算の回数第i回目と記述する。

表－１に４辺固定正方形板の自由振動問題を例にしたときの内部選点数Mの解に及ぼす影響を示す。表の値は第１回目の結果であるが、M≧９で良好な収束性がみられる。なお、表には、参考のためにDaweら[3]によるRayleigh-Ritz法の結果及びそれに対する本計算値の相対誤差（%）を示した。これによると両手法による結果はよく合致している。

図－２は、４辺固定板の座屈問題に対する繰り返し計算回数iの影響をみたものである。M=11による結果は、正方形板（L/B=1）及び長方形板（L/B=2）の板厚比L/h=10,100　にたいして、一定値に非常に早く収束し、２ないし３回の繰り返し計算で一定値に達している。

５．まとめ

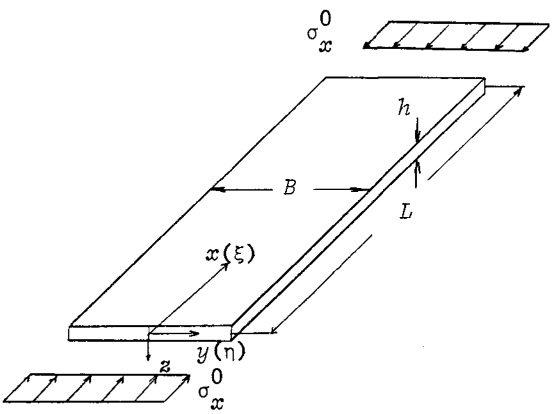
以上に、選点法とKantorovichの方法の結合によるMindlin板の固有値問題の解析法を提示した。本解析法は、比較的少ない内部選点数と繰り返し計算で十分な精度の解を与える。

参考文献

1)Mikami,T.and Yoshimura,J., Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates,Compute.Struct., Vol.18, pp.425-431, 1984.

2)三上　隆・芳村　仁，選点法による固有値問題の解析，構造工学における数値解析シンポジウム論文集，pp.10～15，1986.

3)Dawe,D.J.and Roufaeil,O.L., Rayleigh-Ritz vibration analaysis of Mindlin plates, J.Sound Vib., Vol.69, pp.345-359, 1980.



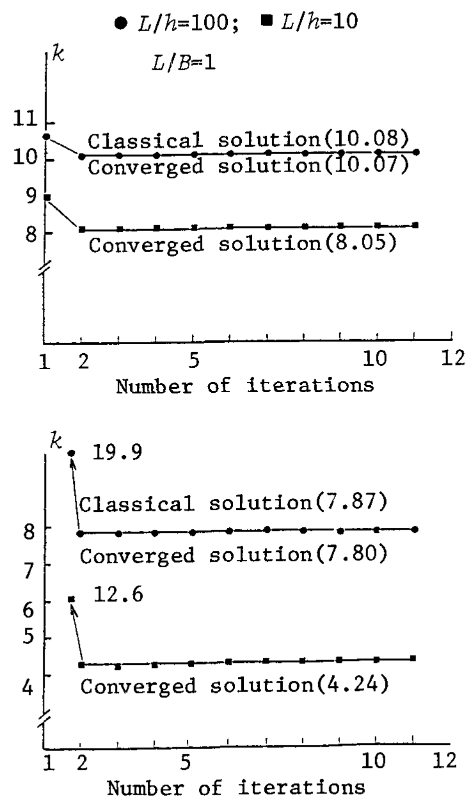
図－１　解析モデル

表－１　振動数パラメータΩの収束状況

（L/B=1，h/L=0.1）

Mode m	n	(1) Present M=9	(2) M=10	(3) M=11	(4) M=12	(5) Dawe	ε = (5)-(4) / (5) x100
1	1	1.593	1.593	1.593	1.593	1.588	0.31%
2	1	3.042	3.042	3.042	3.042	3.029	0.40%
1	2	3.031	3.031	3.031	3.031	3.029	0.00%
2	2	4.260	4.260	4.260	4.260	4.256	0.09%
1	3	5.038	5.038	5.038	5.038	5.040	0.04%

m = Number of half waves in the x direction
n = Number of half waves in the y direction



図－２　座屈係数kの収束状況