

I-27

エネルギー原理によるはり構造物の材料非線形解析法に関する考察

愛媛大学大学院 学生員 〇藤 協 敏夫
愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二

1. まえがき

材料の非線形性を考慮した構造物の解析法として、これまで主として荷重増分法や反復法による種々の解法が提案されているが、著者らは、近年、エネルギー原理に着目しSQPを用いてトラス構造物のコンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより、材料非線形解析が能率的に行えることを明らかにしている¹⁾。本研究ではこの解析法をさらに拡張し、はり構造物の材料非線形解析を行う方法について基礎的な研究を行ったものである。

2. はり断面のMと Π_{cx} の関係式の導入

曲げモーメントMを受けるはり構造物の微小長さ dx におけるコンプリメンタリーエネルギー Π_{cx} は次式により計算することができる。

$$\Pi_{cx} = \int_{Ax} \beta(x, y) dA dx, \quad M_x = \int_{Ax} \sigma(x, y) \cdot y dA \quad (1)$$

Ax : はりの x 点における断面積 y : 断面の中立軸からの距離

$\beta(x, y)$: はりの x 点における断面の中立軸から y の距離にある点の単位体積当りのコンプリメンタリーエネルギー(図-1参照)

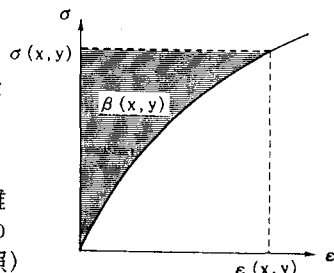


図-1 非線形材料の応力-ひずみ関係および $\beta(x, y)$

図-1に示すような応力-ひずみ関係を有する非線形材料の場合には、断面内の E が一定値とならないため、式(1)を用いて Π_{cx} を計算しなければならない。この場合、曲げモーメントを受けるはりの断面は平面を保持するものとし、はり断面の最外縁ひずみを仮定することにより、断面のMと Π_{cx} の関係を導入することができる。

3. コンプリメンタリーエネルギー最小化に基づく解析法の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理によれば、はり構造物の真の曲げモーメント分布は、各断面における曲げモーメントのつりあい方程式の条件のもとで、はり構造物全体のコンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより決定することができる。ところで、はり構造物の任意の点の曲げモーメントは、図-2より、外力による i 番目の静定基本ばりの曲げモーメント(M_{si})と、節点上に作用する不静定曲げモーメント(M_i (M_{iIR} , M_{i+1L}))による曲げモーメントの和として次のように表わされる。

$$M_i(X) = M_{si}(X) + M_{i+1L}(X) + M_{iIR}(X) \quad (i=1, \dots, J) \quad (2)$$

また、節点における曲げモーメントのつりあい方程式は、各節点において左右の不静定曲げモーメント M_{i+1L} と M_{iIR} が等しくなることで表現できる。すなわち、

$$M_{i+1L} = M_{iIR} = M_i \quad (i=1, \dots, J) \quad (3)$$

式(2)および(3)の関係式を用いることにより、はり構造物の全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題は、 M_i を変数とする次のような非線形最小化問題として定式化することができる。

find M_i , such that

$$\text{minimize} \quad \Pi_c(M_i) = \sum_{k=1}^n \Pi_{cx_k}(M_{ik}) \Delta x_k \quad (4)$$

Π_c : はりの全コンプリメンタリーエネルギー n : はりの要素数

式(4)の $\Pi_c(M_i)$ は、仮定した M_i を用いて式(2)および(1)より簡単に求められる。

4. M_i の改良法(a) Π_c の二次形式近似

式(4)の無制約最小化問題を解くため、 $\Pi_c(M_i)$ を次のように二次形式に近似し、 M_i の改良のための変量化 ΔM_i^p に関する無制約最小化問題を導入する。

find ΔM_i^p , such that

$$\text{minimize} \quad Q_c^p(\Delta M_i) = \nabla \Pi_c^T \Delta M_i^p + \frac{1}{2} \Delta M_i^{pT} H_c^T \Delta M_i^p \quad (5)$$

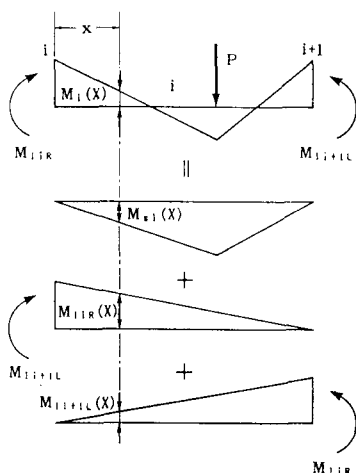


図-2 任意点の曲げモーメント

(b) 改良のための変化量 ΔM_I^P の算定

式(5)の無制約最小化問題において、 Q_c^P の最小点までの変化量 ΔM_I^P は、改良方向 $d^P = -\nabla \Pi_c^P$ を用いて次式により求められる。

$$\Delta M_I^P = -\frac{\nabla \Pi_c^P d^P}{d^P T H_c^P d^P} d^P \quad (6)$$

(c) 無制約最小化問題の修正

(b) で求めた ΔM_I^P を用いてモーメント M_I を次式により改良する。

$$M_I^{P+1} = M_I^P + \Delta M_I^P \quad (7)$$

改良された M_I^{P+1} を新たな初期値として式(4)の新しい無制約最小化問題を作成する。この場合、 M_I^{P+1} に関する二次の係数行列 H_c はBFGS公式により修正する。このようにして $Q_c(\Delta M_I)$ すなわち $\Pi_c(M_I)$ が最小値となるまで M_I の改良を繰り返すことにより最終的な不静定モーメント M_I^* を決定することができる。

5. 解析結果および考察

上記のはり構造物の非線形解析法により、図-3に示す3種類の非線形材料および $E=2,000,000 \text{ kg/cm}^2$ である線形材料を有する種々の不静定ばりを解析したが、例として図-4に示す二径間および三径間連続ばりの解析結果を図-5および表-1に示す。解の収束判定基準として、全コンプリメンタリーエネルギー Π_c の変動が $1/1,000,000$ 以下となった時点で収束したものと判定した。A, B, C いずれの材料においても、二径間連続ばりでは3回の反復改良で最終解の近傍に達し、4~5回の反復改良で最終解を得ている。また、三径間連続ばりの場合も、未知不静定曲げモーメント M_I が2個となるが、6~8回の反復改良で最終解に収束している。このように、本研究の方法によれば、解法の定式化が極めて単純となり、さらに、材料の非線形性にほとんど関係なく同程度の反復改良回数で解を得ることができる。

また、本研究で得られた不静定曲げモーメントの精度を確認するため、線形材料について厳密解との比較を行った結果、二径間連続ばりでは完全に一致し、三径間連続ばりでは0.15%の誤差が認められたにとどまり、本研究の解法の信頼性が明らかとなった。

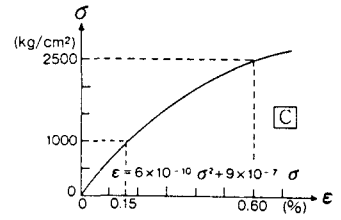
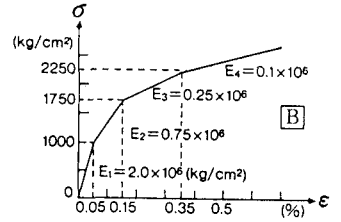
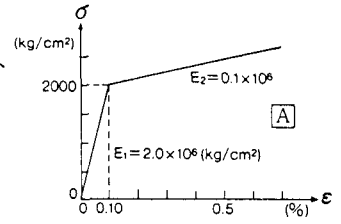


図-3 3種類の非線形材料

表-1 各解析モデルの反復改良回数

材 種	線 形	A	B	C
二径間	4	5	5	4
三径間	6	7	8	7

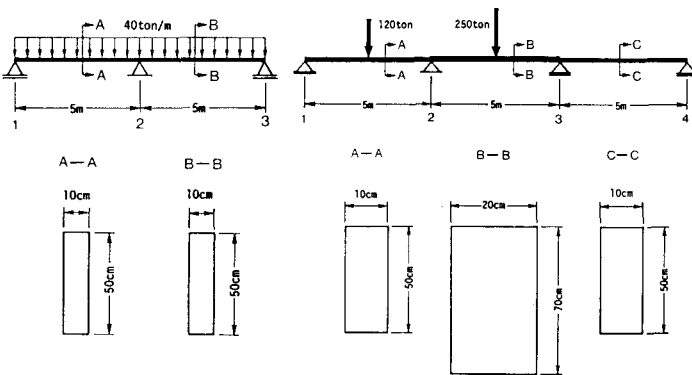


図-4 解析モデル

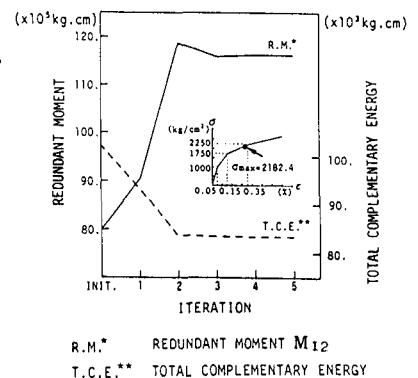


図-5 二径間連続ばりの解の収束状況 (材料B)

参考文献：1) 大久保・和多田：エネルギー原理およびS Q Pによるトラス構造物の材料非線形解析法に関する研究，土木学会論文集，第374号，pp427~436，1986.10.