I-26　選点法による幾何学的非線形を考慮した梁の動的問題の解析

北海道開発局　正会員　山本　泰司
北海道大学　正会員　三上　隆
北海道大学　正会員　芳村　仁

1．まえがき

梁の非線形自由振動問題および任意外力を受ける非線形動的応答問題は、非線形微分方程式で記述されるため、通常は何らかの近似計算手順に依らざるを得ない。電子計算機の進歩により数値計算の容易になった今日、構造物の工学的信頼性を高めるためにも非線形理論による解析が行われるべきであるが、動的問題は一般に静的問題に比べてその挙動は複雑であるため、合理的な手法の開発が望まれている。本報告は、選点法をTimoshenko梁理論に基づく非線形自由振動問題および動的応答問題に適用し、その有効性を検討したものである。

2．Timoshenko梁の基礎方程式

ここではTimoshenko梁理論に基づく梁の基礎微分方程式を導く。歪一変位関係式は次式を用いる。

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}-\psi \qquad (1)$$

ここで、ε_{xx}＝軸方向歪、ε_{xz}＝せん断歪、u＝軸力による軸方向変位、ψ＝回転角、w＝たわみ。

式(1)を用いれば、梁の基礎方程式は次のように得られる。

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underline{\frac{EA}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (2.a)$$

$$\underline{EA\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]}+\kappa GA\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (2.b)$$

$$\kappa GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\rho I\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0 \qquad (2.c)$$

ここで、κ＝せん断補正係数、A＝断面積。

3．選点法による定式化および数値計算例

式(2)は非線形微分方程式なので繰返し計算法（ステップ回数をnと記す）によって解を求める。その際、式(2)の非線形項（下線部）は、ステップn-1とステップnの積で表わし、線形化をする。次に選点法により、振動問題では空間に関する線形化された常微分方程式を代数方程式系に、応答問題では線形化された偏微分方程式を時間に関する常微分方程式系に帰着させ、さらに解くべき方程式系は境界条件を考慮して内部選点のみの未知量で表わす。その詳細は振動問題では文献1)、応答問題では文献3)に譲る。なお、選点には区間[0, 1]で定義されるM次のshifted Legendre多項式の零点を採用する。

3.1）非線形自由振動

未知関数u，w，ψを固有円振動数ωを用いて次のように表わす。

$$u(x,t)=u(x)\cos^2\omega t,\quad w(x,t)=w(x)\cos\omega t,\quad \psi(x,t)=\psi(x)\cos\omega t \qquad (3)$$

式(3)を式(2)に代入し、時間座標を分離できない式(2,a)および式(2,b)に対しては、それぞれ重み関数を$\cos^2\omega t$および$\cos\,\omega t$とする時間に関する積分（区間[0, $2\pi/\omega$]）により位置に関する常微分方程式を導く。

本手法による計算結果を表-1および図-1に示す。選点数はM＝11である（自由度＝33）。表-1は、細長比L／r＝500の両端単純支持梁について本手法と他の解法とによる結果をω_{NL}/ω_L（ω_{NL}＝非線形固有円振動数，ω_L＝線形固有円振動数）に関して比較したもので、本手法については、軸方向慣性を考慮しない場合（$\ddot{U}=0$）と、これを考慮する場合（$\ddot{U}\neq 0$）について示している。本手法による解析結果は、

他の解法の結果とよく一致している。図-1は、先と同様の梁の振動形であり、振幅レベルがw_0／ｒ＝1, 3，5（w_0＝スパン中央の振幅，ｒ＝断面二次半径）の場合の振動形をスパン中央の振幅を基準化して描いてある。図中の白丸は選点におけるｗの振幅であり、振幅レベルによらずsin曲線に一致している。

3.2）非線形動的応答解析

時間方向の積分にNewmark-β法（β=1/4）を用いた結果を図-2に示す。解析モデルはスパン中央に集中荷重ｐがステップ関数的に作用する両端支持梁である。なお計算は梁の対称性からスパンの半分のみを解析し、M=11とした。図中の横軸τは無次元化された時刻（$\tau = C_b/L \cdot t$，c_b＝縦波伝播速度，L＝スパン長）で縦軸ｗ／ｒはスパン中央のたわみｗを断面二次半径で無次元化した値である。また、３本の応答曲線は荷重レベルP_0（$=\frac{PL^2}{EI}$）＝1.0の場合の線形応答と、P_0＝1.0およびP_0＝10.0の場合の非線形応答曲線である。図から荷重レベルが大きくなると応答周期が小さくなっていることが分かる。これは梁の剛性が硬化バネの特性であることを示している。

4．まとめ

以上に、直交多項式の零点を選点とする選点法を幾何学的非線形を考慮した梁の自由振動問題および動的応答問題に適用し、その有効性を明らかにした。

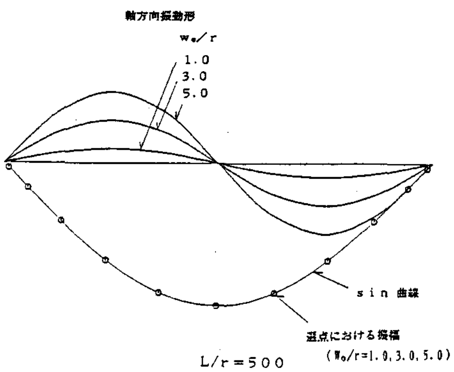
参考文献

1）三上・芳村，土木学会論文報告集，第341号，1983，p.69； Computers & Structures，Vol.18，1984，p.425． 2）三上・芳村，土木学会論文集，第374号/I-6，1986，p.319． 3）Burgreen, D.，J. Appl. Mech.，Vol.18，1951，p.135． 4）Srinivasan, A.V.，AIAA J.，Vol.3，1972，p.1951． 5）Mei, C.，AIAA J.，Vol.10，1972，p.355.

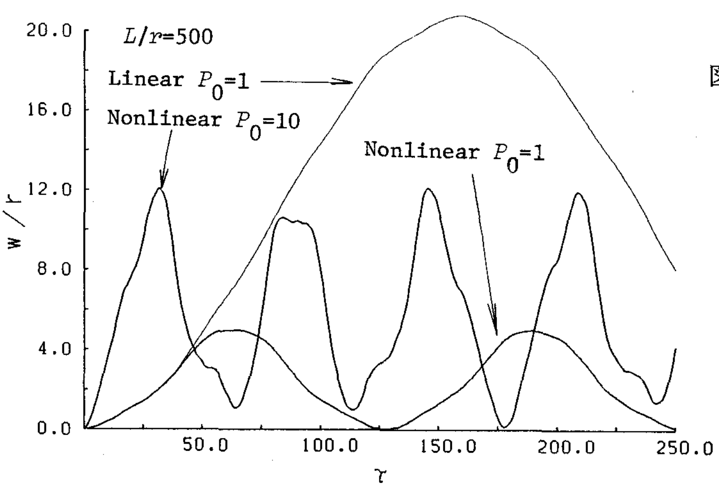
表－１　本手法と他の解法との比較（ω_{NL}／ω_L）

単純支持梁（細長比 L/r=500）

W_0/r	古典理論			修正理論($\bar{U}=0$)		修正理論($\bar{U}\neq0$)
	Analytical[3]	Method 1[4]	Method 2[5]	Analytical	Present	Present
1.0	1.0891	1.0897	1.0899	1.0892	1.0897	1.0897
2.0	1.3177	1.3320	1.3183	1.3178	1.3229	1.3229
3.0	1.6256	1.6370	1.6260	1.6257	1.6394	1.6394
4.0	1.9760	2.0000	1.9715	1.9761	2.0000	2.0000
5.0	2.3501	2.3850	2.3341	2.3503	2.3850	2.3849



図－１　振動波形（両端単純支持）



図－２　スパン中央のたわみの応答波形（両端単純支持）