I-25　棒の後座屈問題への選点法の応用

北海道大学　学生員　吉田　紀之
北海道大学　正会員　芳村　仁
北海道大学　正会員　三上　隆

1、はじめに

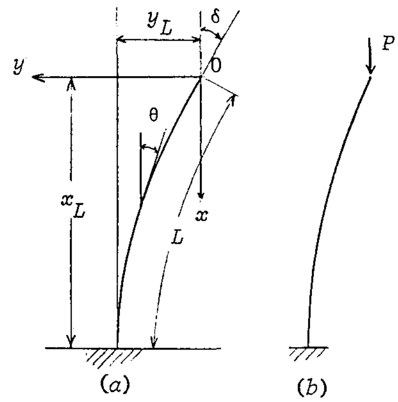
大変形挙動を生じやすい構造要素の挙動を解明するには、ひずみ－変位関係式に非線形性を取り入れた幾何学的非線形問題の解析が必要であり、この問題は非線形微分方程式によって支配され、厳密に解く一般的な解法が存在しないため多くの近似解法が提案されているが、効率性などの解決すべき問題を抱えている。　本報告は、選点法[1)]を棒の後座屈問題に適用し、その適用可能性および有効性の検討を行ったものである。

2、基礎方程式

図－１（ａ）に示すように自由端を座標系の原点とする下端が固定され、上端が自由な細長い棒を考える。解析の対象となるモデルは図－１（ｂ）に示すような集中荷重Ｐを受ける棒であり、その大変形挙動を支配する基本微分方程式は、曲げに伴う棒の伸縮を無視すると言う古典的エラスチカ理論に従うものとすれば以下となる。ただしξは原点０から棒の軸に沿った距離の無次元化座標である。

$$d^2\theta/d\xi^2+k\mathrm{Sin}\,\theta=0 \qquad 但し k=PL^2/EI \text{ --- } (1)$$

境界条件：$\xi=0$で　$d\theta/d\xi=0$,　$\xi=1$で　$\theta=0$ ---(2)



図－１　解析モデルと座標系

3、選点法による定式化

選点法による離散化過程は、基本的には文献１）に従うので、ここでは後の展開に必要なことのみを記すことにする。まず棒の軸に沿って$0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_M<\xi_{M+1}=1$のM＋１個の点を配置し、内部選点$\xi_j$（ｊ＝１　～M，M＝内部選点数）には、区間［０，１］で定義されるM次のShifted Legendre多項式の零点を採用する。$\xi_0=0$と$\xi_{M+1}=1$は境界条件が指定される点に配置される物で端点と呼ぶ。

さて、式（１）は非線形微分方程式なので逐次近似法（繰り返し法）で解析過程を構成するが、繰り返し計算過程のｎ回目のサイクルにおいては、式（１）は次式が成立するものとする。

$$\frac{d^2\theta^{(n)}}{d\xi^2}+k^{(n)}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\theta^{(n-1)}}{\theta^{(n-1)}}\right)\theta^{(n)}=0 \text{ --- } (3)$$

ここで、$\theta^{(n-1)}$は一つ前のサイクルのθの値である。

まずM個の条件式は基礎方程式（３）の内部選点における残差条件より、また残り２個の条件式は境界条件式（２）より得られる。次に、端点における未知量を消去すれば、棒の後座屈問題は次のような固有方程式に帰着される。

$$[\alpha]\{\theta_c^{(n)}\}+k^{(n)}[\gamma^{(n-1)}]\{\theta_c^{(n)}\}=\{0\} \text{ --- } (4)$$

ここで、$[\alpha]$=M次正方行列、$[\gamma]$=式（３）に現れる$\mathrm{Sin}\,\theta/\theta$の内部選点における値を対角成分とするM次正方行列、$\{\theta_c^{(n)}\}$=内部選点における未知量を成分とするベクトル。

式（４）の解kは、初期値$\theta^{(1)}$（本報告ではEulerの座屈波形）を仮定し、所要の精度で得られるまで繰り返し計算することにより定められる。

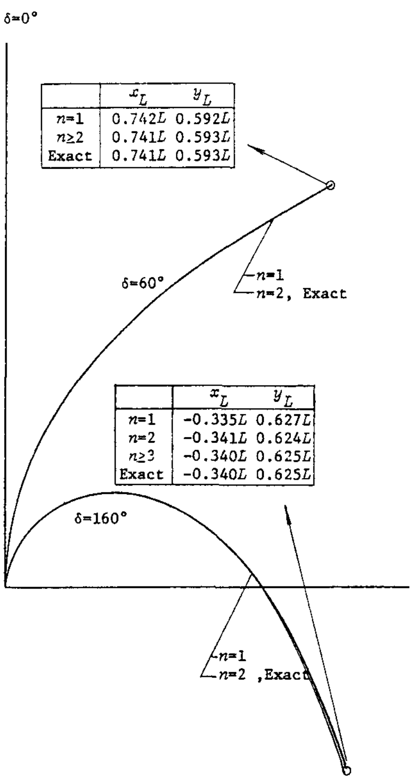
4、数値計算例

以下に示す結果は、自由端の角度をδとするようなたわみを生じさせる荷重をEuler荷重（$P_{cr}=\pi^2EI/4L^2$）で正規化したもので整理した。また、以下の計算にはM＝１１を用いた。
図－２はδ＝６０°、１６０°に対する自由端のたわみに与える反復計算回数ｎの影響を示したものであるが、これによるといずれのδに対しても数回の反復計算で正解と一致していることがわかる。
図－３に、自由端における変形（水平変位ｖ，垂直変位ｕ）と荷重の関係を示した。結果は楕円積分による正解[2)]と一致しており、本手法は高い非線形を有する場合にも極めて有効であることが理解できる。

5、まとめ

以上に選点法による棒の後座屈問題の解析過程を提示し、具体的計算例を通じてその有効性を明らかにしたが、その基礎的な特性として、少ない内部選点数と少ない反復計算回数で効率よく高精度の解が得られることと、特別な工夫を要することなく複雑な形状変化を伴う高い非線形を有する問題の解析が可能であることが挙げられる。

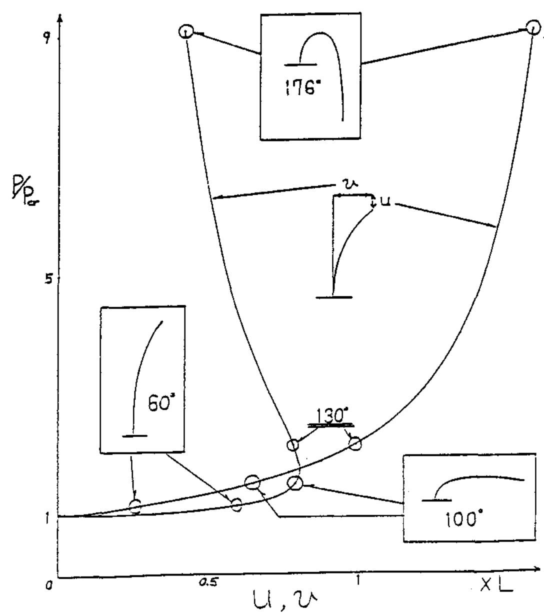
参考文献
1)三上　隆・芳村　仁，選点法による回転殻の応力波伝幡問題の解析，土木学会論文集，No.374/I-6,pp.319-328,1986.　2)Timoshenko,S,P.and Gere,J.M.,Theory of Elastic Stability,1961.



	x_L	y_L
n=1	0.742L	0.592L
n≥2	0.741L	0.593L
Exact	0.741L	0.593L

	x_L	y_L
n=1	-0.335L	0.627L
n=2	-0.341L	0.624L
n≥3	-0.340L	0.625L
Exact	-0.340L	0.625L

図－２　反復計算回数ｎのたわみ形状に及ぼす影響



図－３　自由端の変位と荷重の関係