

I-23

円弧アーチの横倒れ座屈の理論的考察

長岡技術科学大学大学院 学生会員 岩崎英治

長岡技術科学大学建設系 正会員 林 正

1. まえがき

円弧アーチの横倒れ座屈に関する研究は、Timoshenkoに始まり多くの研究がある。最近ではYoo³⁾による研究、座屈前の面内変形の影響を考慮したTrahair⁵⁾の研究や、部材を構成する母線ごとの曲率の違いを考慮したYang⁴⁾の研究がある。しかし、これらの研究では幾何学的な考察から式を導いているためか、結果に若干の違いがみられる。そこで、本報告では、文献1)の有限変位場を基にして座屈の支配方程式を誘導し、既往の結果との比較検討を行う。

2. 解析上の仮定とモデル: 記号等の意味は、文献1)に従うものとして、解析には線形座屈解析の仮定を適用し次の2つの円弧アーチのモデルについて検討する。

表-1 解析モデル

モデル	面内境界条件	面外境界条件	荷 重	応力状態
A	一端ヒンジ、他端ローラ	両端ヒンジ	両端等曲げモーメント	曲げのみ
B	半径方向変位のみ自由	"	求心等分布荷重	軸圧縮のみ

3. 座屈の支配方程式

(1) モデル-A: 部材を構成する母線ごとの初期曲率の違いや、座屈前の面内変形を考慮した式が発表されていることから、これら2つのケースについて座屈の支配方程式を文献1)より次のようになる。

・母線ごとの初期曲率の違いを考慮

$$\left. \begin{aligned}
 (\delta v_0): & \quad Ely \hat{x}_{31,11} - \kappa_2 GJs \hat{x}_{11,1} \\
 & \quad - Mo(1+2\kappa_2^2 \frac{Iw}{Iz} - \kappa_2^2 \frac{Ir}{A} - \kappa_2^4 \frac{Iw}{A}) \hat{x}_{11,1} - \kappa_2 Mo(-2 \frac{Iw}{Iz} + \frac{Iy}{A} + \kappa_2^2 \frac{Iw}{A}) \hat{x}_{31,11} = 0 \\
 (\delta \phi): & \quad -\kappa_2 Ely \hat{x}_{31} - GJs \hat{x}_{11,1} + Elw(\hat{x}_{11,111} - \kappa_2 \hat{x}_{31,11} + \kappa_2^2 \hat{x}_{11,1} - \kappa_2^3 \hat{x}_{31}) \\
 & \quad - Mo(1+2\kappa_2^2 \frac{Iw}{Iz} - \kappa_2^2 \frac{Iy}{A} - \kappa_2^4 \frac{Iw}{A}) \hat{x}_{31} + \kappa_2 Mo(-2 \frac{Iw}{Iz} + \frac{Ir}{A} + \kappa_2^2 \frac{Iw}{A}) \hat{x}_{11,1} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

・面内変形($\hat{x}_{21}^\circ$)を考慮

$$\left. \begin{aligned}
 (\delta v_0): & \quad Ely(\hat{x}_{31} + \hat{x}_{32})_{,11} - \kappa_2 GJs(\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12})_{,1} + \kappa_2 Elw(\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12})_{,111} - Mo \hat{x}_{11,1} \\
 & \quad + \hat{x}_{21}^\circ [\kappa_2 Elwyz \hat{x}_{31,11} - E(lwyz + Iw) \hat{x}_{11,111} - GJs \hat{x}_{11,1}] = 0 \\
 (\delta \phi): & \quad -\kappa_2 Ely(\hat{x}_{31} + \hat{x}_{32}) - GJs(\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12})_{,1} + Elw(\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12})_{,111} - Mo \hat{x}_{31} \\
 & \quad + \hat{x}_{21}^\circ [-Ely \hat{x}_{31} + Elwyz \hat{x}_{31,11} - \kappa_2 Elwyz \hat{x}_{11,1}] = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) モデル-B

・母線ごとの初期曲率の違いを考慮

$$\left. \begin{aligned}
 (\delta v_0): & \quad Ely \hat{x}_{31,11} - \kappa_2 GJs \hat{x}_{11,1} \\
 & \quad - No \cdot v_{0,11} - \kappa_2 \frac{No}{A} (Ir + \kappa_2^2 Iw) \hat{x}_{11,1} + \frac{No}{A} (Iy + \kappa_2^2 Iw) \hat{x}_{31,11} = 0 \\
 (\delta \phi): & \quad -\kappa_2 Ely \hat{x}_{31} - GJs \hat{x}_{11,1} + Elw(\hat{x}_{11,111} - \kappa_2 \hat{x}_{31,11} + \kappa_2^2 \hat{x}_{11,1} - \kappa_2^3 \hat{x}_{31}) \\
 & \quad - \kappa_2 \frac{No}{A} (Iy + \kappa_2^2 Iw) \hat{x}_{31} - \frac{No}{A} (Ir + \kappa_2^2 Iw) \hat{x}_{11,1} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

・母線ごとの初期曲率の違いを省略

$$\left. \begin{aligned}
 (\delta v_0): & \quad Ely \hat{x}_{31,11} - \kappa_2 GJs \hat{x}_{11,1} + \kappa_2 Elw \hat{x}_{11,111} \\
 & \quad - No \cdot v_{0,11} - \kappa_2 No \frac{Ir}{A} \hat{x}_{11,1} + No \frac{Iy}{A} \hat{x}_{31,11} = 0 \\
 (\delta \phi): & \quad -\kappa_2 Ely \hat{x}_{31} - GJs \hat{x}_{11,1} + Elw \hat{x}_{11,111} - \kappa_2 No \frac{Iy}{A} \hat{x}_{31} - No \frac{Ir}{A} \hat{x}_{11,1} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

表-2 支配方程式の比較・検討

モデル	初期曲率の違い	面内変形	研究者	本文との関係
A	省略	省略	Vlasov ²⁾	式(2)で実線の項（面内変形による項）を省略すると一致する。
			Yoo ³⁾	式(2)の実線の項を省略して、二重下線の項を $\hat{x}_{11,1} \rightarrow \phi_{,11}$, $\hat{x}_{31} \rightarrow (\hat{x}_{31} - x_2 \phi)$ に置き換えると得られる。Yooは、直線部材の全ポテンシャル・エネルギーを求め、変位の2階微分の項に単純に円弧部材の曲率の式を代入して円弧部材の式を誘導しているため、曲率の扱いが不正確である。
	考慮	省略	Yang ⁴⁾	式(1)で破線の項を省略して、二重下線の項 $\hat{x}_{31}$ を $v_{0,11}$ とおくと得られる。破線の項は、部材軸方向変位の2乗項から導かれるが、実用的な断面ではこの項の影響は小さい。二重下線の項については式の誘導に際し、グリーンひずみ式に線形の変位場を用いたためである。
	省略	考慮	Trahair ⁵⁾	式(2)でねじれ率・曲率 $\hat{x}_{12}$, $\hat{x}_{32}$ と $Elwyz$ を零とおくと得られる。Trahairらは、面内変形を考慮していない円弧部材の座屈荷重を求めて、この式で x_2 に $x_2 + \hat{x}_{21}^0$ を代入している。
B	省略	省略	Vlasov ²⁾	式(4)の破線の項を省略して、二重下線の項 $v_{0,11}$ を $\hat{x}_{31}$ とおくと得られる。破線の項は、座屈時のつり合い式を幾何学的な関係から求めているために欠落しているが、これは実用的な断面では影響が小さい。また、二重下線の項は外力項を直線材の式で変位の2階微分の項に円弧部材の曲率の式を代入して求めているためである。
			深沢 ⁶⁾	式(4)で破線の項を省略して、一点鎖線の項を $\phi_{,11}$ とおくと一致する。
	考慮	省略	Yang ⁴⁾	式(3)で破線の項を省略すると得られる。この項は前記のことに数値的には影響しない。

ここに、 x_2 : 初期曲率, $\hat{x}_{21}^0$: 面内変形による曲率の変化量, ϕ : ねじれ角, v_0 : 面外変位, $(\cdot)_{,1}$: 部材軸座標による微分
 $\hat{x}_{11}$, $\hat{x}_{12}$: 各々、面外変形、面外と面内変形の連成によるねじれ率, $\hat{x}_{31}$, $\hat{x}_{32}$: 面外変形、面外と面内変形の連成による曲率

4. 計算例： モデル-Aの計算例を図-1、図-2に示す。なお、解析モデルの諸元は文献3)に従う。

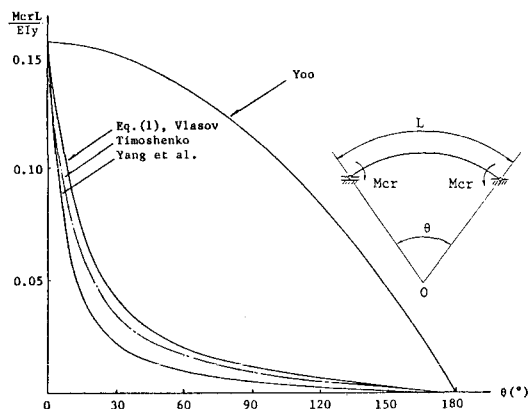


図-1 弱軸曲げ

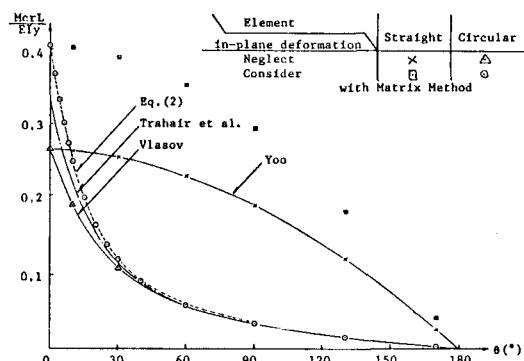


図-2 強軸曲げ

図-1より、Yooの結果は他の結果に比べて傾向を異にしている。また、母線ごとの曲率の違いを考慮した式(1)とYangらの結果に違いがみられ、式(1)は母線ごとの曲率の違いを考慮していないVlasovの結果と図上では一致していることから母線ごとの曲率の違いの座屈荷重への影響は小さいと考えられる。図-2からは、座屈前の面内変形の影響を考慮した式(2)とTrahairらの結果に違いがあることが分かる。

5. あとがき： 精密な有限変位場に、仮想仕事の原理を適用することによって円弧アーチの横倒れ座屈の支配方程式を厳密な定式化により求めた。得られた支配方程式を既往の結果と比較すると、若干の違いがあることが分かった。これは、既往の研究では幾何学的な直感から座屈時のつり合い式や、この基礎となる曲率や変位場を誘導しているために、高次項に不正確な部分があるためである。なお、マトリックス法による座屈解析においても、図-2に示したように従来の結果と数値的に有為な差があり、これに関しては、文献7)を参照されたい。

- 1) 林・岩崎・前田：構造工学論文集Vol. 33A, 1987. 2) Vlasov (奥村ほか共訳：薄肉弾性ばりの理論，技法堂出版，1961). 3) Yoo, C. H. : ASCE, Vol. 108, No. EM6, 1982. 4) Yang, Y. B. and S. R. Kuo : ASCE, Jour. of Eng. Mech., Vol. 112, No. 8, 1986. 5) Vacharajittiphan, P. and N. S. Trahair : Proc. of ASCE, Vol. 101, No. ST6, 1975. 6) 深沢：土木学会論文集，第96号，1963. 7) 林・岩崎：構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第11巻，1987. (投稿中).