

I-20

任意形状の帯板要素の開発

長岡技術科学大学大学院 学生員 西谷 雅弘
長岡技術科学大学建設系 正会員 林 正
大 阪 府 正会員 坂田 敦

1. まえがき

従来から用いられている有限帯板法の要素形状は、長方形・平行四辺形、一定曲率の扇形板や曲率板など規則的なものであり、任意形状の要素については定式化されていない。そこで、本研究では、有限要素法で用いられている写像変換の手法により、任意の形状に適用することのできる帯板要素を開発する。

2. サパラメトリック帯板要素

(1) 解析概要： 任意な形状に写像変換する前の帯板要素（親要素）には、有限要素法（FEM）と同じく厚板要素を用いる。これを薄板の曲げ解析に適用するために、FEMでは次数低減積分の手法が用いられることが多いが、有限帯板法（FSM）では、変位関数に境界条件に応じた種々の級数を用いるので、最適な数値積分次数を定めるのが困難である。そこで、本研究では以下のような手法を用いた。

- 1) 最適積分を必要としない離散化Kirchhoff要素を用いる。
- 2) Kirchhoffの拘束条件を課すのに縮約の手法を用いる。
- 3) このとき、逆対称モードの級数項に対して特異の問題が生じるので、拘束条件を工夫する。
- 4) FSMでは、両端固定の境界条件を満足する級数にはりの固有関数を用いるが、双曲線関数を含むために数値積分には適さない。

そこで、多項式で表わした新しい級数を求める。

(2) 帯板要素： 要素の形状を決定するための形状関数には、FEMの8節点Serendipity要素の形状関数を用い、親要素には中間節線のある長方形帯板要素を用いる。これらの節点及び節線には図-1のように番号を付け、正規座標（ ξ , η ）を図のように定義する。

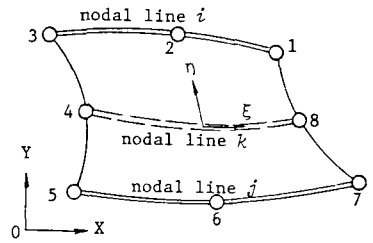


図-1 帯板要素

(3) 変位関数： 親要素の変位関数 w , θ を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_m F_m(\xi) \{ f_i(\eta) w_{im} + f_j(\eta) w_{jm} + f_k(\eta) w_{km} \} \\ \theta(\xi, \eta) &= \sum_m F_m(\xi) \{ f_i(\eta) \theta_{im} + f_j(\eta) \theta_{jm} + f_k(\eta) \theta_{km} \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

w_{im} , θ_{im} , etc. は一般化変位であり、節線 i のたわみと ξ 軸回りのたわみ角の第 m 項である。また、

$$f_i(\eta) = \eta(\eta+1)/2, \quad f_j(\eta) = \eta(\eta-1)/2, \quad f_k(\eta) = 1-\eta^2 \quad (2)$$

である。 $F_m(\xi)$ は展開関数で、両端（ $\xi = \pm 1$ ）で単純支持のときには通常の正弦級数を用いる。両端固定支持の場合には、はりの固有関数の代りに次の関数を考えた。

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= (\xi^2 - 1)^2, \quad F_2(\xi) = \xi \cdot F_1(\xi), \quad F_3(\xi) = (\xi^2 - 1/9) F_1(\xi) \\ \text{一般に、} \quad F_m(\xi) &= (\xi^2 - 1)^2 \prod_{i=1}^{m-1} (\xi + \beta_{m,i}) \quad (\beta_{m,i} = 1 - 2i/m) \end{aligned} \quad (3)$$

(4) 拘束条件： 次式の薄板の曲げ変形に対する Kirchhoffの拘束条件を厚板要素に課す。

$$\Gamma(\xi, \eta) = \partial w / \partial y - \theta = 0 \quad (4)$$

ここで、 y に関する偏微分は ξ , η の偏微分に変換するものとする。式（4）の適用方法には、要素内部や境界上の点、または線に沿って課す事が考えられるが、積分拘束を用いた場合、長方形要素または長方形に近い要素では奇関数の積分値が零になる事から、拘束条件式として次のような条件式を考えた。

$$\left. \begin{aligned} \text{① 点拘束} &: \Gamma(1/\sqrt{3}, \eta_0) \pm \Gamma(-1/\sqrt{3}, \eta_0) = 0 \\ \text{② 線拘束} &: \int_{-1}^1 \Gamma(\xi, \eta_0) J_s d\xi \pm \int_0^1 \Gamma(\xi, \eta_0) J_s d\xi = 0 \\ \text{③ 面拘束} &: \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Gamma(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \pm \int_{-1}^1 \int_0^1 \Gamma(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = 0 \\ &\quad \int_0^1 \int_{-1}^1 \Gamma(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \pm \int_{-1}^1 \int_0^1 \Gamma(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$J_s d\xi = dx, \quad |J| d\xi d\eta = dx dy \quad (6)$$

ここに、複号は $F_m(\xi)$ が偶関数のときに正、奇関数のときに負とする。また、 η_0 には $1/\sqrt{3}$ と $-1/\sqrt{3}$ を用いるものとする。従って、各式はそれぞれ2本になるので、これらの式を各級数ごとに適用して w_{km} と θ_{km} を消去する。なお、長方形要素の場合には、上記の3つの条件は同一になる。写像変換と縮約の手法やサブパラメトリック要素の定式化については説明を省略する²⁾。

3. 数値計算例 本解析法の妥当性を調べるために薄板の曲げ解析を行う。

(1) 正方形板： 図-2に示すように、正方形板を斜めに分割し、2要素を用いて計算する。境界条件、荷重及び分割角度を種々変化させた場合に拘束条件と級数項数による精度を調べた。表-1

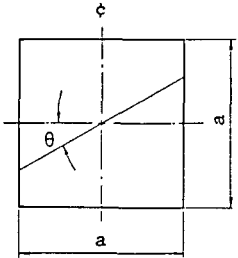


図-2 正方形板

表-1 正方形板の最大たわみ

荷重条件	展開項数	拘束条件	四辺単純支持			四辺固定支持		
			$\theta = 0^\circ$	$\theta = 15^\circ$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 15^\circ$	$\theta = 30^\circ$
集中荷重	1	① ② ③	0.931	0.865 0.874 0.886	0.651 0.682 0.730	0.957	0.914 0.927 0.937	0.763 0.819 0.867
	3	① ② ③	0.983	0.945 0.953 0.969	0.815 0.843 0.921	1.001	0.980 0.992 1.005	0.894 0.948 1.018
	5	① ② ③	0.994	0.955 0.963 0.978	0.820 0.847 0.925	1.021	1.000 1.012 1.025	0.913 0.965 1.038
	解析解 $\times (10^{-2} Pa^2/D)$		1.0 (1.1591)			1.0 (1.1647)		
全載等分布荷重	1	① ② ③	1.029	1.000 1.011 1.004	0.867 0.911 0.890	1.129	1.109 1.126 1.120	0.763 0.819 0.867
	3	① ② ③	1.014	1.003 1.014 1.007	0.941 0.986 0.966	1.099	1.093 1.110 1.104	0.894 0.948 1.018
	5	① ② ③	1.017	1.004 1.014 1.007	0.939 0.984 0.964	1.099	1.094 1.111 1.105	0.913 0.965 1.038
	解析解 $\times (10^{-2} qa^2/D)$		1.0 (4.0623)			1.0 (4.12651)		

全載等分布荷重を受ける単純支持板 ($\theta = 15^\circ$) では1項のみでほぼ正解が得られており、エルミートの3次多項式を用いた通常の長方形帯板要素で2項まで用いた精度¹⁾に匹敵する。周辺固定板では正解に収束していない場合もあるが、上述の長方形要素を用いた計算¹⁾では板の半分を5要素に分割して正解が得られている事から、本解法の精度は一応評価できるものと思われる。

(2) 斜板： 文献3)に示された、全載等分布荷重を受ける単純支持の斜板 (斜角 $= 26.5^\circ$) について計算した。図-3に、4要素に分割して1項と3項までを用いて求めたたわみ曲線を示す。3項まで採用した場合には、差分法による値 (○印) とほぼ一致している。また、160要素 (10×16) を用いたFEM解 (日本電気、ISAPを使用) も示した。

4. あとがき： 数値計算例では要素分割が粗いので十分な精度が得られていない場合もあるが、本手法により任意な四辺形要素に対して有限帯板法の適用が可能である事がわかった。任意な曲線要素に対しても本手法がそのまま適用できるが、さらに変位関数を工夫して精度の改善を計りたい。

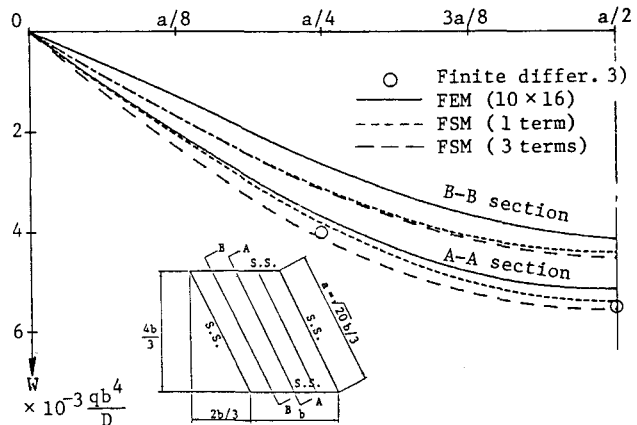


図-3 斜板のたわみ曲線

- 1) Cheung, Y.K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
- 2) 林・坂田・西谷 : 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第11巻、1987.
- 3) Timoshenko, S.P. and S. Woinowski-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., 1959.