I－19　均等メッシュにおける節点消去の一方法について

鹿島建設［正］石原　元　　熊大［正］平井一男
八代高専　　内山義博

１。はじめに

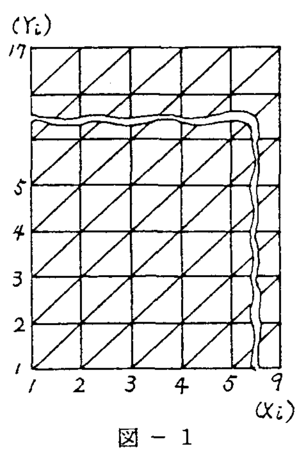
応力集中問題等で、応力勾配が急変するところのメッシュ分割を細かくするのは当然であるが、集中部以外もかなり細分割する必要がある。これに伴い、計算機の容量、計算時間は増大する。このとき与系の不規則な部分は他の手法(ズーム法等)で解析すると、系の大部分は均一なメッシュに分割できる。ここでは、この均一なメッシュ部分についての節点消去を便利に行う手法について述べる。

２。理論

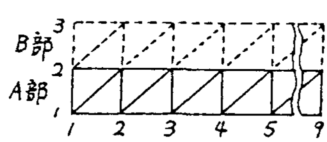
図－１に示す様な均等に分割された一様な厚さ及び材質の長方形板について、中間節点を全て消去して、上下端すなわちY_1、Y_{17}行に縮合することを考える。このとき、次のような手順で消去を行う。まず偶数行、つまりY_2行から１行おきに消去していく。こうすると縮合された奇数行Y_1、Y_3、…、Y_{17}の各行でX_1、X_2、…、X_9列には上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並ぶ。この縮合された行について、また１行おきに消去を行えば縮合された行はやはり上下端を除いて各縦列毎に同じ値が並ぶ。従って、各段階での消去を１行おきに行う様にすれば内部行は同じ値が並ぶから、各段階毎に任意の１行さえ求めればよいことになる。しかもこの任意の１行は各段階での最下行Y1行によって次のごとく表わされる。今、Y_1～Y_4行に関する変位をそれぞれU_1～U_4、Y_5以下Y_{17}までに関する変位をU_5とし、それに応じてマトリックスも分割表示する。なお、簡単の為外力はないものとして話を進める。以上のことより剛性方程式は式(1)の様に表わせる。図－(1)でわかるように、Y_1行はY_3行以降とは関係ないからK_{13}～K_{15}は零である。同様にY_2、Y_3、Y_4、Y_{5-17}行についても関係ない行は零から、式(1)は式(2)のようなバンドマトリックスとなる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad \cdots \quad (2)$$



図－１



図－２

式(2)を展開しY_2、Y_4行の消去、縮合を考える。

$$K_{11}U_1 + K_{12}U_2 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$K_{21}U_1 + K_{22}U_2 + K_{23}U_3 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

$$K_{32}U_2 + K_{33}U_3 + K_{34}U_4 = 0 \quad \cdots \quad (5)$$

$$K_{43}U_3 + K_{44}U_4 + K_{45}U_5 = 0 \quad \cdots \quad (6)$$

$$K_{54}U_4 + K_{55}U_5 = 0 \quad \cdots \quad (7)$$

式(4)より　$U_2 = -K_{22}^{-1}K_{21}U_1 - K_{22}^{-1}K_{23}U_3 \quad \cdots \quad (8)$

式(6)より　$U_4 = -K_{44}^{-1}K_{43}U_3 - K_{44}^{-1}K_{45}U_5 \quad \cdots \quad (9)$

式(8)、(9)を式(3),(5),(7)に代入すると

$(K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})U_1-K_{12}K_{22}^{-1}K_{23}U_3=0$ … (10)

$-K_{32}K_{22}^{-1}K_{21}U_1+(K_{33}-K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}-K_{34}K_{44}^{-1}K_{43})U_3-K_{34}K_{44}^{-1}K_{45}=0$ … (11)

$-K_{54}K_{44}^{-1}K_{43}U_3+(K_{55}-K_{54}K_{44}^{-1}K_{45})U_5=0$ … (12)

上３式をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} & -K_{12}K_{22}^{-1}K_{23} & 0 \\ -K_{32}K_{22}^{-1}K_{21} & K_{33}-K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}-K_{34}K_{44}^{-1}K_{43} & -K_{34}K_{44}^{-1}K_{45} \\ 0 & -K_{54}K_{44}^{-1}K_{43} & K_{55}-K_{54}K_{44}^{-1}K_{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_5 \end{Bmatrix} = 0$$

と表わせる。このとき、第２行は以下の如く第１行の要素で表わすことが出来る。 … (13)

まず、(2,1)要素は $K_{12}=K_{23}$、$K_{21}=K_{32}$、$K_{12}^T=K_{21}$、$K_{23}^T=K_{32}$ より

$$-K_{32}K_{22}^{-1}K_{21}=-K_{23}^TK_{22}^{-1}K_{12}^T=(-K_{12}K_{22}^{-1}K_{23})^T$$

となり、(1,2)要素の転置マトリックスとして表わされる。

次に、(2,2)要素は $K_{44}^{-1}=K_{22}^{-1}$、$K_{34}=K_{12}$、$K_{43}=K_{21}$ より

$$K_{33}-K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}-K_{34}K_{44}^{-1}K_{43}=(K_{33}-K_{11})-K_{21}K_{22}^{-1}K_{12}+(K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})$$

と表わされる。まず、右辺の第３項は(1,1)要素と同一である。右辺第１、２項については、次のような関係がある。K_{33}はY_3行の主対角マトリックスであり、この剛性マトリックスにはY_2、Y_3、Y_4行が関係している。一方、K_{11}にはY_1、Y_2行が関係しているが、これはY_3、Y_4行の関係と同一である。従って、$(K_{33}-K_{11})$はY_2、Y_3、Y_4の重ね合わせからY_3、Y_4の影響を抜いたものであり、$(K_{33}-K_{11})_1$の要素はK_{11}のそれの逆並びとなっていることが分かる。また、K_{12}とK_{21}はお互いに逆並びであるから右辺第２項の$K_{21}K_{22}^{-1}K_{12}$は$K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$と逆並びである事が分かる。従って、(2,2)要素はY_1行の(1,1)要素と(1,1)要素の逆並びの和で表わすことが出来る。

最後に、(2,3)要素は　$K_{34}K_{44}^{-1}K_{45}=K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}=K_{12}K_{22}^{-1}K_{23}$

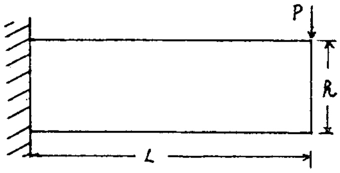
となり、(1,2)要素と同一である。以上のことより、式(13)の第２行要素はすべて第１行要素で表わされた。従って、第１行要素のみを記憶しておけば縮合された任意行は作成出来ることになる。以下同じ操作を繰り返せば各段階における縮合された任意行はその時のY_1行を用いて作成出来ることになる。

３。手法の適用について

上記のことより、Y_1行のみ求まっておけばよく、各段階で必要な演算は$K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$、これの逆並びとの和、$-K_{12}K_{22}^{-1}K_{12}$である。要素としては$K_{11}$、$K_{12}$、$K_{22}^{-1}$のうち$K_{22}$は$K_{11}$より作成できるから$K_{11}$、$K_{12}$のみでよい。つまり、図－２のＡ部のみを用いればよくＡ、Ｂ部を用いる方法をここではサブストラクチャ法と呼ぶが、それより少ない容量、計算量ですむ。図－１の問題は図－２に示す系のＡ部について上記計算を４回繰り返し行えば上下端Y_1、Y_{17}に縮合出来ることになる。本法とサブストラクチャ法について、図－１モデルで横方向を４０分割、縦方向を３２分割した場合について計算時間の比較を行った。結果を表－１に示す。節点数１３５２、要素数２５６０であるが、かなりの時間差が見られる。マトリックスの掛け算回数の差であろう。次に簡単な適用例として図－３に示すような片持ちばりの計算を行った。各諸元は表－２に示す通りである。縦４０分割、横２５６分割で、本法を８回繰り返すことにより上下端に縮合出来る。節点数１０５３７、要素数２０４８０であるが、本法によればマイコンでも計算できる。せん断たわみも考慮した先端の理論たわみ値$\delta=116.4P/E$に対して$\delta=116.6P/E$であった。

表－１

	CPU TIME
本　　法	23.97秒
ｻﾌﾞｽﾄﾗｸﾁｬｰ法	34.09秒



図－３

表－２　モデル諸元

L＝6m	h＝2m
幅＝1m	ﾎﾟｱｿﾝ比＝1/6