I-18　トラッキング問題に関するダイナミックプログラミングの応用

○中央大学　学生員　深沢恵志
中央大学　正　員　川原睦人

１．緒言

トラッキング問題とは、外乱をうける系に対して、ある種の評価関数を設定し、その評価関数を最小にするような操作量を見つけ、それによって系を最適に制御する問題を言う。本研究は地動を受ける構造物をトラッキング問題と考えて、構造物の振動をコントロールすることを検討するものである。このとき、最適な操作量の決定にあたり、ダイナミックプログラミングを用いることを試みた。ダイナミックプログラミングは、「最適制御が行われていれば、その途中、どの点から最終点までの区間を取っても、そこで最適になっていなければならない。」という、きわめて明瞭な「最適性の原理」に基づいたものである。よって、理解しやすく、また最適操作量の導出に用いる計算は、行列、ベクトルなどの四則演算のみとなるのでコンピュータによる解析に適したものとなる。今回は、集中質量をもつ一自由度系の構造物に、外力として余弦波地動が働いた場合の最適制御を例とし、リカッチの微分方程式による方法や遷移行列による方法など、他の手法との比較を行い、本手法の有効性を検討した。

２．トラッキング問題

制御をほどこした構造物に余弦波地動が作用した場合の運動は、次の差分方程式であらわすことができる。

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k)+C(k) \qquad (1)$$
$$X(0)=0$$

ここに$X(k)$は、第k時間点における変位と速度を表す状態ベクトル、$U(k)$は制御量を表す操作量ベクトルである。また、A，Bはそれぞれ（j，j），（j，m）行列、Cはj次元ベクトルである。
評価関数として次のエネルギー量を設定する。

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}\{X^T(k+1)QX(k+1)+U^T(k)RU(k)\} \qquad (2)$$

ここで、Q，Rはそれぞれ（j，j）、（m，m）の重み係数行列、^{T}は転置行列を表す。地動を受ける構造物の最適制御問題は、（１）式の状態のもとで（２）式を最小にするような操作量を決定する問題として定式化される。このとき、式（１）に外力項$C(k)$を含むため、トラッキング問題と呼ばれている。

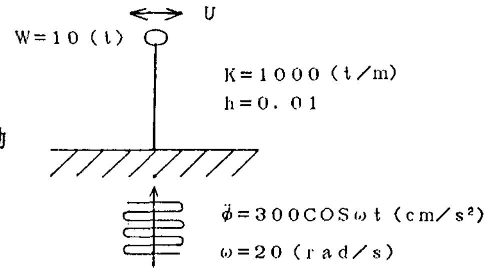
３．ダイナミックプログラミングによる定式化

はじめにN－１段階において、評価関数J_{N-1}を最小にするような最適操作量$U(N-1)$を決定する。つぎにN－２段階において、N－１段階でもとめた$\min J_{N-1}$を利用して$U(N-2)$を決定する。これを０段階まで行うと最適性の原理より全体が最適になり、全部の最適操作量がもとまる。最適操作量の一般項は次式である。

$$\begin{aligned}U_{OPT}(N-n)=-(R+B^TW_{n-1}B)^{-1}B^T[&W_{n-1}AX(N-n)\\&+W_{n-1}C(N-n)\\&+Y_{n-2}W_{n-2}C\{N-(n-1)\}\\&+Y_{n-2}Y_{n-3}W_{n-3}C\{N-(n-2)\}\\&+Y_{n-2}Y_{n-3}Y_{n-4}W_{n-4}C\{N-(n-3)\}\\&+Y_{n-2}Y_{n-3}Y_{n-4}Y_{n-5}W_{n-5}C\{N-(n-4)\}\\&\vdots\\&+Y_{n-2}Y_{n-3}Y_{n-4}Y_{n-5}Y_{n-6}\cdots Y_0W_0C(N-1)]\end{aligned}$$

ただし、$W_0=Q$

$$W_n=Q+A^TW_{n-1}A-A^TW_{n-1}B(R+B^TW_{n-1}B)^{-1}B^TW_{n-1}A$$
$$Y_n=A^T-A^TW_nB(R+B^TW_nB)^{-1}B$$



４．解析例

ばね定数K＝１０００（ｔ／m）、減衰定数ｈ＝０．０１、重量W＝１０（ｔ）の一自由度系の片持ちばりに加速度ϕ＝３００COSωｔ（cm／s^2）、ω＝２０（ｒａｄ／ｓ）の地動が作用し、それを制御力Uにより制御する場合について解析をおこなう。またリカッチ微分方程式による方法と遷移行列法との結果の比較をおこなう。

５．解析結果

重み係数行列Qを単位行列としR＝１．０×１０$^{-3}$の場合の構造物の相対変位及び、制御力を図１に示す。図中の点線は制御を行わなかった場合のものである。図より、構造物の相対変位がコントロールされているのがわかる。図２はR＝１．０×１０$^{-4}$の場合の最適操作量について他の手法との比較を行ったものであり、図中の実線は、リカッチの微分方程式の解を利用し最適操作量を求めたもの、○印は本手法用いたもの、△印は遷移行列法により求めたものである。リカッチの微分方程式は、非線形であるので厳密解を求めることができずルンゲクッタ法を用いて近似解を求める。厳密解が得られないので、時間間隔Δｔを十分な収束解が得られる迄小さくしていき（本結果ではΔｔ＝５．０×１０$^{-4}$（ｓ））それを利用して求められる最適操作量を基準とした。本手法ではΔｔ＝２．０×１０$^{-2}$（ｓ）で十分満足できる解が得られている。また遷移行列法の解は途中で発散している。

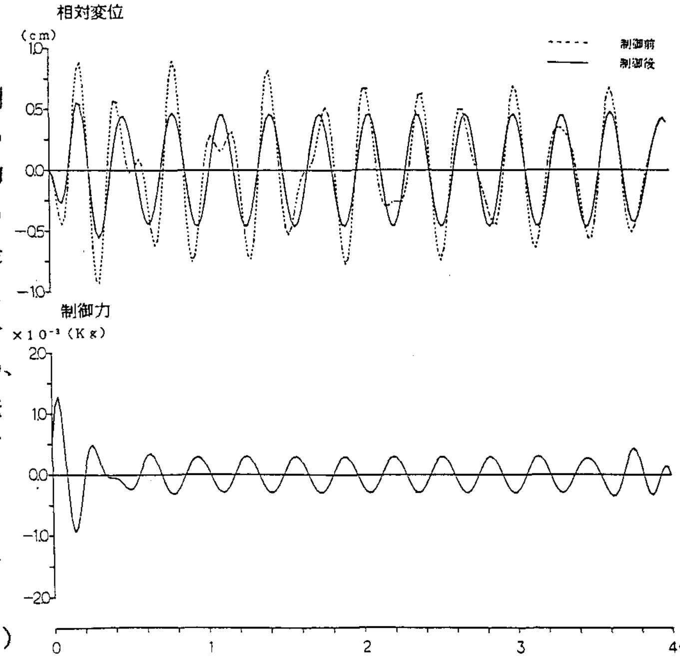


図１、相対変位及び、制御力（R＝１．０×１０$^{-3}$）

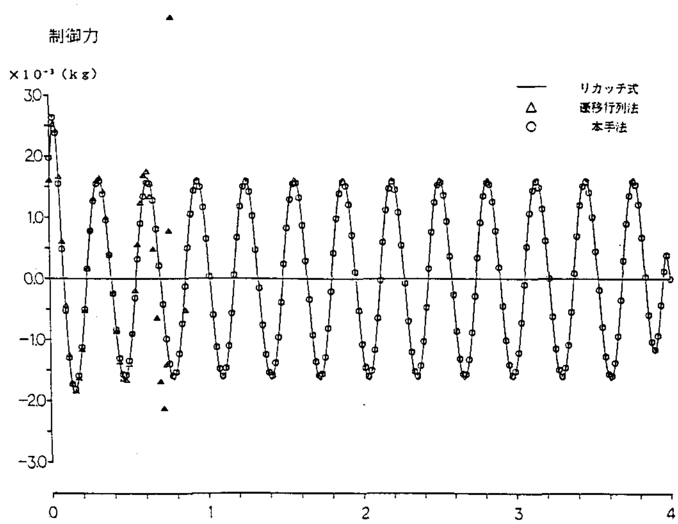


図２、他手法との比較（R＝１．０×１０$^{-4}$）

６．結論

ダイナミックプログラミングは、一般に外乱のないレギュレータ問題には多く用いられてきた。しかし、トラッキング問題には、余り応用例を見ないようである。この研究ではトラッキング問題における最適操作量の決定にあたりダイナミックプログラミングを用いるという試みを行い、その有効性を示した。他の解析手法に比べて、解析が安定であり時間間隔Δｔを大きくとることができることが判明した。またこれに応じて、記憶するデータの数を少なくすることができる。これは、実際の計算に応用する上で非常に有利となるものである。

参考文献　辻　節三　最適制御概論　養賢堂　１９６７