I-17　マトリックス構造解析におけるＰＣＧ法の適用について

○　三井造船（株）　正員　曽我　明
岡山大学　正員　谷口健男

1．はじめに

近年、有限要素法等のマトリックス構造解析において、大次元で疎な係数行列の連立方程式を解くための有効な解法が望まれている。一般に、この解法としては直接法がよく用いられているが、多大な計算機容量と解の精度の面で欠点を有している。そのため、最近ではPreconditioned Conjugate Gradient 法、特に、不完全コレスキー分解を用いたＩＣＣＧ法が注目されている。しかしながら、この不完全コレスキー分解では、面外成分を有する板曲げ問題等を解く場合において、対角項に負が入り、コレスキー分解が不可能になることがある。

したがって、その解決策として、どのような構造解析の問題に対しても適用できるＩＣＣＧの手法を見出だすこと、もしくは、その他の前処理技法を捜す必要性があるといえる。そこで、本研究ではその一つの解決策として考えられる Matrix Splitting を前処理技法としたＰＣＧ法に着目して、その収束特性等について考察を行う。

2．Matrix Splitting（以下、MSで略す）を前処理技法としたＰＣＧ法

いま、有限要素法等の適用によって得られる連立方程式を

$$A \cdot x = b$$

とする。ここで、Ａは正定値対称で疎な剛性行列、ｂは荷重ベクトル、ｘは未知節点変位ベクトルである。

このとき、ＭＳを前処理技法に用いるＣＧ法のアルゴリズムは以下のように示される。

STEP 1　$r_0 = b - A \cdot x_0$　（ x_0 ；初期ベクトル）

STEP 2　$P_0 = B \cdot r_0$

STEP 3　$\alpha_k = \dfrac{P_k^t \cdot r_k}{P_k^t \cdot A \cdot P_k}$

STEP 4　$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot P_k$

STEP 5　$r_{k+1} = r_k - \alpha_k \cdot A \cdot P_k$

STEP 6　$\beta_k = -\dfrac{r_{k+1}^t \cdot B \cdot A \cdot P_k}{P_k^t \cdot A \cdot P_k}$

STEP 7　$P_{k+1} = B \cdot r_{k+1} + \beta_k \cdot P_k$

STEP 8　go to STEP3

なお、下付き添字は反復回数を、上付き添字”ｔ”は転置を表している。また、行列Ｂは以下のようにして求められる。

$$A' = D^{-1/2} \cdot A \cdot D^{-1/2} = L' + I + (L')^t$$

ここで、ＤはＡの対角行列、L'は下三角行列、Ｉは単位行列である。

さらに、調整パラメータ　ｗを導入して、

$$C = I + w \cdot L'$$

と置くことにより

$$B = (C \cdot C^t)^{-1}$$

とする。

３．数値実験

図１に示したモデルで、以下の３つの手法について検証を加えた。第１にMSを用いたＰＣＧ法、第２に対角項だけＩＣ分解（対角項に負が入ることを避けるため）したＩＣＣＧ法、第３にＣＧ法を用いてそれぞれの反復回数を調べた。ただし、反復回数としてはEPS=10^{-7}までのITをとっている。結果を表１に示す。

①．同一元数で、板曲げ要素と定ひずみ要素のそれぞれの反復回数を比較した場合、元数が大きくなるにつれて、３手法とも板曲げ要素の解の収束性が悪くなってきている。

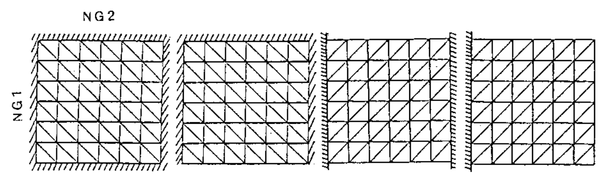
②．MSを用いたＰＣＧ法は調整パラメータｗをuser側が指定しなくてはならないという欠点を持つが、反復回数に対してかなり鈍いため、問題とならない。

③．板曲げ要素の剛性行列の元数が小さい場合には、MSを用いたＰＣＧ法は、他の２手法に比べて収束性が悪い。

④．境界条件を四辺固定から一辺固定へと剛性行列の条件数が大となる方向へ変化させるにつれて、ＣＧ法よりも、やや他の２手法のほうが収束性が高まる傾向がある。

４．あとがき

MSを用いたＰＣＧ法、及び対角項だけのＩＣ分解を行うＩＣＣＧ法は、コレスキー分解が不可能となるような欠点は存在しないことより、どのような構造問題に対しても有効である。しかしながら、板曲げ要素に対しては、その固有値分布を改善するような前処理技法を施しても、元の条件数が大きいため、収束性の改善にはまだまだ不十分であるといえる。



四辺固定　　三辺固定　　対辺固定　　一辺固定

図－１　Model

表－１　収束回数ITの比較(EPS=10^{-7})

定ひずみ　(N＝３２) NG1×NG2 － 5×5　四辺固定								
w		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
IT	PCG(MS)	12	11	10	11	11	12	12
	PCG(1/D)	9						
	CG	9						

定ひずみ　(N＝１２８) NG1×NG2 － 10×10　四辺固定									
w		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
IT	PCG(MS)	9	9	8	7	7	8	9	10
	PCG(1/D)	8							
	CG	8							

定ひずみ　(N＝３２０) NG1×NG2 － 4×42　対辺固定								
w		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
IT	PCG(MS)	189	161	164	152	151	151	144
	PCG(1/D)	117						
	CG	128						

板曲げ　(N＝２７) NG1×NG2 － 4×4　四辺固定									
w		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
IT	PCG(MS)	23	22	24	24	24	24	26	27
	CG	9							

板曲げ　(N＝１９２) NG1×NG2 － 10×10　四辺固定									
w		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
IT	PCG(MS)	115	112	107	105	107	110	116	125
	PCG(1/D)	63							
	CG	71							

NG1×NG2 － 10×10 境界条件 ／ 元数	IT		
	ＰＣＧ（ＭＣ）	ＰＣＧ（１／Ｄ）	ＣＧ
四辺固定 － １９２	１０５	６３	７１
三辺固定 － ２１６	１６９	１９９	３０６
対辺固定 － ２４０	２１３	１４０	１９１
一辺固定 － ２７０	２９１	３７９	４９９

<参考文献>

1)谷口健男：共役勾配法とその応用，大型行列計算シンポジウム，1985.1.

2)谷口健男，白石成人：EFFICIENT ITERATIVE METHOD FOR LARGE-SCALE STRUCTURE ANALYSIS ，THE FIRST EAST ASIAN CONFERENCE ON STRUCTURAL ENGINEERING AND CONSTRUCTION;Bangkok,Thailand,January 15-17 ,1986

3)浜崎勇二：岡山大学卒業論文，1986