

I-16

二次元静弾性問題境界要素解の境界近傍における誤差について

新潟大学工学部 正会員 阿部和久

1.はじめに 境界要素法は積分方程式の数値解法であり、領域内部での変位、応力等は、境界値もしくはその近似関数と基本解との積を境界積分することにより与えられる。この際に必要となる境界積分は数値積分によることが多く、特にGaussの数値積分法が広く用いられている。しかし、数値積分を用いて領域内部の値を求めた場合、境界より十分離れた位置では精度の良い解が得られるが、境界近傍では計算値が大きく乱れ、その誤差は著しくなる。この一因として、境界上における積分が、被積分関数の有する特異性のため、数値積分では正しく評価できなくなることが挙げられる。

筆者は既に二次元ポテンシャル問題に対し、以上に述べた理由による誤差の挙動の考察を行なったが、¹⁾ 本報告は二次元静弾性問題を対象に同様の考察を与えたものである。

2.対象および仮定 二次元静弾性問題を対象とし、物体力が作用しない場合について考える。又、今回考察した要素は0次（一定）および1次（線形）要素の二種類である。その他に設けた諸仮定を以下に示す。

- ①考察の対象としている領域 Ω 内部の点（内点）は境界近傍に置かれているものとし、内点よりの最近接要素境界を $\partial\Omega_1$ 、全境界より $\partial\Omega_1$ を除いた境界を $\partial\bar{\Omega}_1$ とする。
- ②内点 x は $\partial\Omega_1$ の中央より境界に対し垂直な直線上に位置するものとする。（図-1参照）
- ③境界形状は本来多角形であり、境界形状の近似による誤差は無いものとする。
- ④境界積分に用いる数値積分法はGaussの偶数点積分法とする。

又、境界上での変位、および表面力の近似関数をそれぞれ $\hat{v}_i, \hat{p}_i (i=1,2)$ とすると、 $\partial\Omega_1$ 上の局所座標 s に関して $\hat{v}_i, \hat{p}_i$ は次式で与えられる。

$$\hat{v}_i = \hat{v}_i^0 + \frac{d\hat{v}_i}{ds} \cdot s, \quad \hat{p}_i = \hat{p}_i^0 + \frac{d\hat{p}_i}{ds} \cdot s \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\hat{v}_i^0, \frac{d\hat{v}_i}{ds}, \hat{p}_i^0, \frac{d\hat{p}_i}{ds}$ は $\partial\Omega_1$ の中央($s=0$)における各境界値およびその境界線方向微係数である。特に0次要素においては $\hat{v}_i, \hat{p}_i$ はそれぞれ式(1)右辺第一項までとなる。尚、 $\hat{v}_i, \hat{p}_i$ を式(1)のように表現することで境界値近似の次数による、境界近傍での近似度についても把握することができる。

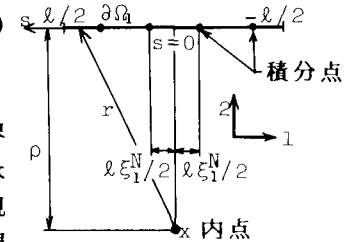


図-1 要素境界 $\partial\Omega_1$ と内点 x との位置関係

3.境界近傍での積分誤差の定式化 領域内部の点 x における変位 v_i を境界要素法（直接法）を用いて近似する場合、式(1)、および前節の仮定により次式を得る。

$$v_i = -\hat{v}_i^0 \int_{\partial\Omega_1} p_j^0 d\Gamma - \frac{d\hat{v}_i}{ds} \int_{\partial\Omega_1} p_j^0 s d\Gamma - \hat{p}_i^0 \int_{\partial\Omega_1} v_j^0 d\Gamma + \frac{d\hat{p}_i}{ds} \int_{\partial\Omega_1} v_j^0 s d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} \hat{p}_j^0 \hat{v}_i^0 d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} \frac{d\hat{p}_j}{ds} \hat{v}_i^0 s d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} \hat{p}_j^0 \frac{d\hat{v}_i}{ds} s d\Gamma + \int_{\partial\Omega_1} \frac{d\hat{p}_j}{ds} \frac{d\hat{v}_i}{ds} s^2 d\Gamma \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u^*_{ij}, p^*_{ij} は二次元弾性問題に対する基本解であり、以下では基本的に平面ひずみ問題に対するKelvin解を用いる。尚、平面応力問題に対しては、各式中ポアソン比 ν を $\nu/(1+\nu)$ で置き換えればよい。

式(2)において各境界上での積分をGaussの数値積分により求めたならば、被積分関数の特異性により、誤差を著しく生ずると思われる項は $\partial\Omega_1$ 上の積分項である。特に p^*_{ij} を積分核とする項は他の項に比べ特異性が強く、数値積分による誤差は主に右辺第一項によるものと思われる。そこで、以下においては式(2)の右辺第一項のみをGaussの数値積分法により求め、他の項は解析的に求めた場合に生じる誤差を考察する。すると、式(2)での積分をGaussの数値積分で計算したものを $\tilde{v}_i$ 、解析的に求めたものを v_i とすれば、それらの差 $\Delta v_i = v_i - \tilde{v}_i$ はポアソン比を ν とすれば、次式により近似できる。

$$\Delta v_i = (C_1 \hat{I}_1 + D_1 \hat{I}_2) / 4\pi(1-\nu) \cdot \hat{v}_i^0 \quad \left. \begin{matrix} C_1 = 3-2\nu \\ D_1 = -2 \end{matrix} \right\} (i=1), \quad \left. \begin{matrix} C_1 = 1-2\nu \\ D_1 = 2 \end{matrix} \right\} (i=2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)で $\hat{I}_1, \hat{I}_2$ とは次に示す積分に対するGaussの数値積分にて生ずる誤差である。

$$\hat{I}_1 = I_1 - \tilde{I}_1 \quad (i=1,2), \quad I_1 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{ds}{r^2}, \quad I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{ds}{r^4}, \quad \tilde{I}_1 = 2 \sum_{k=1}^N w_k^N / r_k^2, \quad \tilde{I}_2 = 2 \sum_{k=1}^N w_k^N / r_k^4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3),(4)において ρ, r, s は図-1で定義された変数であり、 $\hat{I}_i$ とは I_i をGaussの2N点積分で評価した値である。又、 r_k, w_k^N とは第k番積分点での r と重み係数である。式(3)には $\frac{d\hat{v}_i}{ds}|_1$ の項が含まれていないので、 Δv_i に対しては、境界値 $\hat{v}_i$ の要素上での近似次数の影響は無い。従って、0次、1次要素に対し Δv_i の評価は同一のものとなる。所で、式(3)での評価を行なうには式(4)の $\hat{I}_i$ の評価が必要である。しかし、 $\hat{I}_i$ を式(4)のように総和形式で表現すると $\hat{I}_i$ の定性的特徴が捕えにくくなる。そこで、本報告では、 $\hat{I}_i$ の評価を定性的にも、又定量的にも可能とするために、以下に述べるような $\hat{I}_i$ の近似を行なった。

まず、 $\partial\Omega_1$ 上において対称な被積分関数を f とし、 f に対して積分 I を次式のように定義する。

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(s) ds = \ell \int_0^1 g(\xi) d\xi \quad (f(\ell\xi/2) \equiv g(\xi))$$

ここで、局所座標 ξ において最も内側に位置する積分点の座標値 ξ_{N_1} を用いて、新しい変数 $\eta = \xi / \xi_{N_1}$ を導入すると、 I は次式ようになる。

$$I = \ell \xi_{N_1}^N \cdot \left\{ \int_0^{\Delta\eta_1^N} g(\xi_{N_1}^N \eta) d\eta + \sum_{i=1}^{N-1} g(\xi_{N_1}^N \eta) d\eta \right\} \quad (\Delta\eta_1^N = w_1^N / \xi_{N_1}^N) \quad \dots\dots\dots (5)$$

一方、積分 I に対するGaussの数値積分 $\hat{I}$ は次式で与えられる。

$$\hat{I} = \ell \sum_{i=1}^N g(\xi_{N_1}^N) w_i^N = \ell \xi_{N_1}^N \sum_{i=1}^N g(\xi_{N_1}^N \eta_i^N) \Delta\eta_i^N \quad (\Delta\eta_i^N = w_i^N / \xi_{N_1}^N) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$\hat{I}$ による I の近似が、 f の特異性により式(5)の内、右辺第一項に対してのみ正しく評価されないものと仮定すると、式(5),(6)より $\hat{I} (= I - \hat{I})$ は次式で与えられることになる。

$$\hat{I} = \ell \xi_{N_1}^N \cdot \left\{ \int_0^{\Delta\eta_1^N} g(\xi_{N_1}^N \eta) d\eta - g(\xi_{N_1}^N) \Delta\eta_1^N \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

以上に述べた手法を $\hat{I}_i$ に対して適用し、更に $\Delta\eta_{N_1} = w_{N_1}^N / \xi_{N_1}^N \approx 2$ とすると、例えば Δv_i は次式で与えられる。

$$\Delta v_i = \left[\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2}{a} \right) - \frac{a}{\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{a^2+4} + \frac{(1-2\nu)a^2+(3-2\nu)}{(1+a^2)^2} \right\} \right] \cdot \hat{v}_i^1 \quad (a=2\rho/\ell\xi_{N_1}^N) \quad \dots\dots (8)$$

4. 誤差評価の妥当性の検討 式(7),(8)で示した数値積分の誤差に対する評価が実際に生じる誤差と良く一致するか否かを検討するために、ここでは図-2に示した簡単な例題に対して得られた結果について述べる。対象とした問題は一方向一様引張りを受ける正方形板平面応力問題であり、領域の境界を1次要素により各辺5分割し、内点を境界より $\rho=5, 2, 1, 0.1, 0.01$ の距離にとった。図-3に示すように前節で述べた誤差の評価が妥当であることがわかる。尚、式(8)では a が唯一のパラメーターであることより、 Δv_i の挙動は積分点数 N によらず $a(=2\rho/\ell\xi_{N_1}^N)$ により規格化できることがわかる。

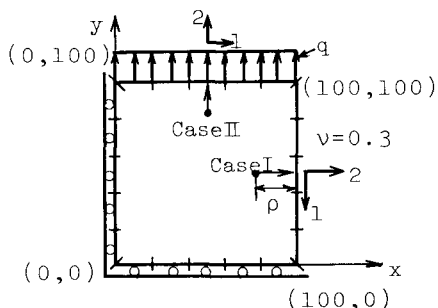


図-2 解析条件および分割方法

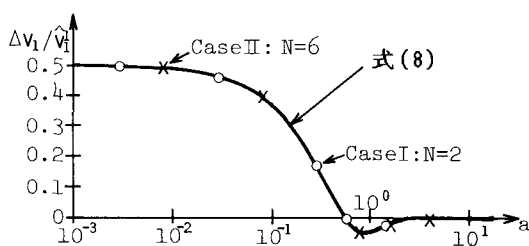


図-3 Δv_i の挙動の評価と妥当性

5. おわりに Gaussの数値積分による積分値の誤差を式(7)により定式化することが妥当であることが確かめられた。変位における誤差は境界値近似次数によらず、パラメーター a により規格化することができる。

〈引用文献〉阿部・早川：境界近傍における境界要素解の挙動に関する一考察、第14回関東支部技術研究発表会講演概要集、1987年