

I-15

構造解析における数値誤差

○ 三井造船 正員 松本 巧
岡山大学 正員 谷口健男

1. まえがき

大規模有限要素解析を行うに当たり、連立一次方程式の解析精度により丸め誤差や桁落ちの発生を無視できなくなる場合がある。これらの数値誤差の防止に関しては、文献1), 2)に述べられているが、これらは簡単な数値モデルにのみに限られ、実際の有限要素モデルには適用できない場合が多い。このようなことから本報告では実際の有限要素モデルを用いて、この数値誤差の発生について考察を論ずるものである。

2. 均一要素による結果

文献1), 2) によれば、剛性行列には非対角項に-1.0, 主対角項 a_{ii} に $a_{ii} \geq \sum |a_{ij}|$ なる数値モデルを用いている。この場合、消去演算途中の条件数(式(1))に着目して数値誤差に影響を及ぼす一要因として消去順序を挙げた。さらに片持ちモデルを用いて、消去順序を固定端側からと自由端側からと比較することによって数値誤差の発生状況に差異があることを示した。

$$\textcircled{\text{条件数}}: \text{cond}(A) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \quad (1)$$

$\lambda_{\max}$: 剛性行列の最大固有値, $\lambda_{\min}$: 剛性行列の最少固有値

まず、実際の有限要素モデルの中で一般に数値誤差の発生が大きいと言われている板曲げ要素を用いて数値誤差を調べた。この結果は文献3)に述べられているが、板曲げ要素の特徴が顕著に現れ、境界条件、消去順序といった条件が埋もれてしまっている。よって、数値モデルによる結果は実際の有限要素にはそのまま適用できない。この結果から板曲げ要素を用いた構造解析には単精度計算は適していないこととなる。

実際の有限要素モデルを用いた構造解析は、一般に倍精度計算で行われるので、実際の構造モデルを解析する上での倍精度計算の信頼性について調べる。

3. 数値実験

倍精度計算による消去演算によって発生した解の数値誤差の評価としては次に示すunbalance force 並びに残差ノルムを用いた。

◎unbalance force

$$Ax=b, \quad x: \text{正解}$$

$$Ax'=b', \quad x': \text{数値解}$$

$$p=b-b'$$

$$\max(p_i)$$

◎残差ノルム

$$\sqrt{\sum p^2} / \sqrt{\sum b^2} \quad \text{図-2 片持ち板モデル}$$

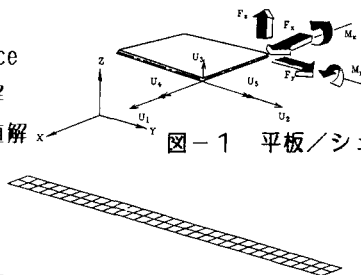


図-1 平板/シェル要素

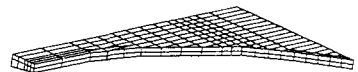


図-3 鋼床版モデル

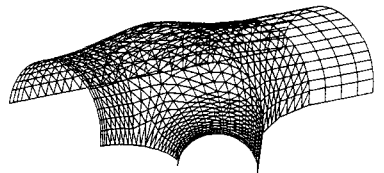


図-4 分岐管モデル

なお、数値実験で使用した計算機はTOSBAC DS600モデル80で、使用した言語はFORTRAN 77である。

平板/シェル要素を図-1に、解析に使用したモデルを図-2, 3, 4に、解析結果を表-1に示す。表-1に示したケースでは誤差は大きく出ていないが、片持ち板では元数も大きく境界条件が片持ちであることから、条件数により剛性行列を調べてみる必要がある。

図-5に示す立体要素を用いて図-6に示すダム堤体モデルを解析した。その結果を表-1に示す。主に立体要素を用いたが、アンカー部にはり要素並びに平板/シェル要素を用いた複合構造である。一要素の辺の比が大きく、異質の要素を用いているところから、誤差は大きく出ていないがこの場合でも条件数を調べてみる必要がある。

図-7に示す箱桁橋のたわみを計算する場合、一般に図-8に示すFish Bone typeのはり要素に置換える場合

が多い。このFish Bone Model の部材構成を図-9並びに表-2に示す。この剛性値 α 、 β を変えて、数値誤差を調べた結果を表-3に示す。ここでは元数は小さいにもかかわらずunbalance force 並びに残差ノルムは α 、 β の値の大きさに影響される。

この結果を考へ、条件数を調べてみた。unbalance force 並びに残差ノルムを表-4に α の値と条件数との関係を図-10に示す。この結果から、 α の値と条件数とは比例関係にあることが得られた。このモデルのように解析上、仮定剛度をいれなければならない場合、1000倍を越えて入力しても誤差を増大させるだけであることが判明した。

4. 考察およびあとがき

本報告より以下の結果が得られた。第一に、板曲げ要素では数値誤差を最少にするには倍精度計算が必要である。第二に、有限要素間の剛性値のオーダーの差により小さなモデルでも誤差が急激に増大する場合があるので、モデル化の時に十分注意する必要がある。なお、本報告で扱った解析モデルはすべて実際の設計の現場で発生したものであり、特にFish Bone Model は箱桁の設計でしばしば扱われている。ゆえに誤差の発生を提言したことは意義があることと考えられる。今後の課題として、条件数は剛性行列の性質を調べる上で有効であるから、Fish Bone Model で元数を大きくしていった場合や平板モデルでも条件数を調べてみる必要がある。

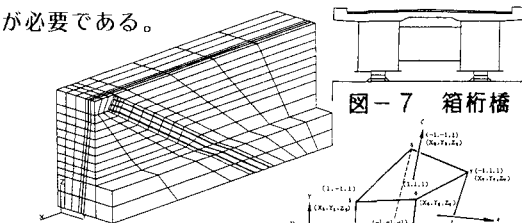


図-6 ダム堤体モデル

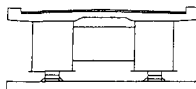


図-7 箱桁橋

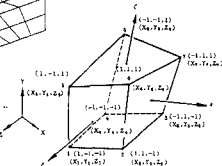


図-5 立体要素

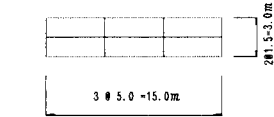


図-8 Fish Bone Model

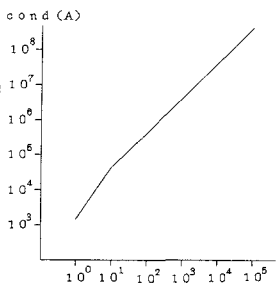


図-9 部材構成 図-10 α の値と条件数との関係

表-1 SAPを使った実モデルの数値誤差

モデル形状	変位, 回転角 (max)	unbalance force	残差ノルム
片持ち板 4500元	$5.78 \times 10^{-1} (w)$ $2.57 \times 10^{-1} (\theta)$	$1.17 \times 10^{-7} (w)$ $1.00 \times 10^{-8} (\theta)$	2.52×10^{-6}
片持ち板 9000元	$9.25 \times 10^{-2} (w)$ $2.06 \times 10^0 (\theta)$	$1.81 \times 10^{-8} (w)$ $1.00 \times 10^{-7} (\theta)$	3.70×10^{-5}
分岐管 5000元	$1.00 \times 10^0 (w)$ $1.00 \times 10^{-3} (\theta)$	$1.00 \times 10^{-8} (w)$ $1.00 \times 10^{-8} (\theta)$	-
鋼床板 2000元	$1.00 \times 10^{-1} (w)$ $1.00 \times 10^{-3} (\theta)$	$1.00 \times 10^{-11} (w)$ $1.00 \times 10^{-12} (\theta)$	-
箱 432元	$1.00 \times 10^{-2} (w)$ $1.00 \times 10^{-3} (\theta)$	$1.00 \times 10^{-7} (w)$ $1.00 \times 10^{-8} (\theta)$	-
ダム堤体 4300元	$1.20 \times 10^{-2} (w)$	$1.00 \times 10^{-13} (w)$	-

表-2 剛性値

	t/m^2		m^2	m^4	m^4	m^4
	E	ν	A	J	I _y	I _z
①	2.1×10^7	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1
②	2.1×10^7	0.3	$0.1 \times \alpha$	$0.1 \times \alpha$	$0.1 \times \alpha$	$0.1 \times \alpha$
③	2.1×10^7	0.3	$0.1 \times \beta$	$0.1 \times \beta$	$0.1 \times \beta$	$0.1 \times \beta$

表-4 α による影響 ($\beta = 1/\alpha$)

α	β	変位, 回転角 (max)	unbalance force	残差ノルム
10^0	10^0	$1.38 \times 10^{-4} (w)$ $3.42 \times 10^{-5} (\theta)$	$4.62 \times 10^{-14} (w)$ $3.55 \times 10^{-14} (\theta)$	9.40×10^{-15}
10^1	10^1	$3.41 \times 10^{-4} (w)$ $8.37 \times 10^{-5} (\theta)$	$1.68 \times 10^{-12} (w)$ $2.11 \times 10^{-12} (\theta)$	3.51×10^{-13}
10^2	10^2	$4.01 \times 10^{-4} (w)$ $9.85 \times 10^{-5} (\theta)$	$6.09 \times 10^{-11} (w)$ $6.06 \times 10^{-11} (\theta)$	1.15×10^{-11}
10^3	10^3	$4.08 \times 10^{-4} (w)$ $1.00 \times 10^{-5} (\theta)$	$3.50 \times 10^{-10} (w)$ $6.61 \times 10^{-10} (\theta)$	7.68×10^{-11}
10^4	10^4	$4.09 \times 10^{-4} (w)$ $1.00 \times 10^{-5} (\theta)$	$4.65 \times 10^{-9} (w)$ $5.26 \times 10^{-9} (\theta)$	8.20×10^{-10}
10^5	10^5	$4.09 \times 10^{-4} (w)$ $1.00 \times 10^{-5} (\theta)$	$4.99 \times 10^{-8} (w)$ $8.86 \times 10^{-8} (\theta)$	8.07×10^{-9}

表-3 α 、 β による影響

α	β	変位, 回転角 (max)	unbalance force	残差ノルム
10^3	10^{-3}	$9.28 \times 10^{-1} (w)$ $2.98 \times 10^{-2} (\theta)$	$1.95 \times 10^{-8} (w)$ $1.30 \times 10^{-6} (\theta)$	1.78×10^{-7}
10^5	10^{-5}	$9.30 \times 10^{-1} (w)$ $2.97 \times 10^{-2} (\theta)$	$1.37 \times 10^{-4} (w)$ $2.75 \times 10^{-5} (\theta)$	8.91×10^{-6}
10^7	10^{-7}	$9.18 \times 10^{-1} (w)$ $2.94 \times 10^{-2} (\theta)$	$7.23 \times 10^{-2} (w)$ $5.46 \times 10^{-2} (\theta)$	9.98×10^{-3}
10^2	10^{-2}	$9.12 \times 10^{-1} (w)$ $2.92 \times 10^{-2} (\theta)$	$9.25 \times 10^{-8} (w)$ $1.29 \times 10^{-7} (\theta)$	1.35×10^{-8}
10^1	10^{-1}	$7.75 \times 10^{-1} (w)$ $2.48 \times 10^{-2} (\theta)$	$6.09 \times 10^{-9} (w)$ $7.00 \times 10^{-9} (\theta)$	8.68×10^{-10}