I-14　　薄肉シェルの有限変位問題の定式化

〇豊田高専　正員　桜井孝昌
東京大学　正員　西野文雄

まえがき

薄肉シェルの理論は３次元問題をシェルの板厚中央面における２次元問題に置換することにより定式化できる。３次元微小要素のつり合い式は最も明瞭な力学的関係である。本報告においては、この３次元のつり合い式に基いて導かれる３次元物体の仮想仕事式をシェルの板厚方向に積分することにより、シェルの有限変位理論を誘導する。定式化おいて、モーメントに対応する回転に関する厳密な幾何学的境界条件の誘導に特に注目する [1]。

理論式の誘導

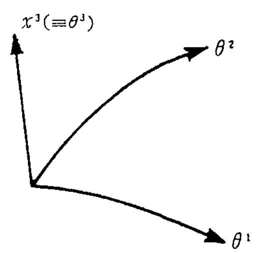

Fig.　1　曲線座標（θ^1, θ^2, x^3）

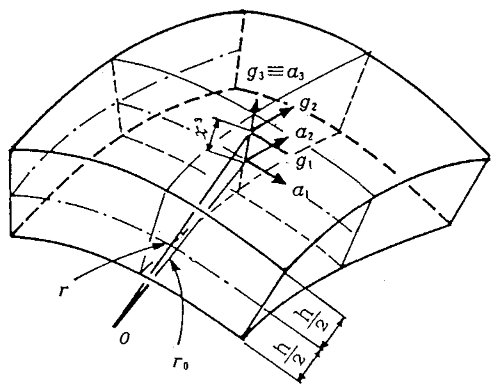

Fig.　2　変位前のシェル要素と基ベクトル

Fig.1 に示すように、任意の曲線座標系を（$\theta^1\theta^2x^3$）と選び、変位前、後の i 方向の基ベクトルを g_i、$\hat{g}_i$ と表す。g を g_i に関する計量テンソル $g_{ij}\equiv g_i\cdot g_j$ によって $g\equiv\det|g_{ij}|$ と定義する。σ_i と X を応力ベクトルと物体力ベクトルとし、$\bar{t}$ と t を変位前の３次元物体の表面に作用する表面力およびその点の応力とすると、３次元物体内および境界面におけるつり合い式は、

$$(\sqrt{g}\,\sigma^i)_{,i}+X\sqrt{g}=0\ ,\quad \bar{t}-t=0 \qquad \text{(1a, b)}$$

$$\sigma_i\equiv\sigma^{ij}\hat{g}_j,\quad X\equiv X^ig_i\ ,\quad \bar{t}\equiv\bar{t}^ig_i\ ,\quad t\equiv\nu^i\sigma_i \qquad \text{(2a～d)}$$

ここに、σ^{ij} はキルヒホッフの応力テンソルで、ν^i は表面の方向を表す係数であり、i は１、２、３を表し、i，j にかんして総和規約を適用する。

Fig．2の原点Oより変位後のシェル内部の任意点までの位置ベクトルを $\hat{r}$ とし、その変分を $\delta\hat{r}$ と表わすと、３次元物体の仮想仕事式は、

$$\int\!\!\int\!\!\int_V\{(\sqrt{g}\,\sigma^i)_{,i}+X\sqrt{g}\}\cdot\delta\hat{r}\,d\theta^1d\theta^2d\theta^3+\int\!\!\int_A(\bar{t}-t)\cdot\delta\hat{r}\,dA=0 \qquad \text{(3)}$$

式（３）はつり合い式から仮想仕事式を導くための途中の式と考える方が自然である。式（３）における $\delta\hat{r}$ を変位後の中央面の位置ベクトルの変分 $\delta\hat{r}_0$ および中央面の法線方向ベクトルの変分 $\delta\hat{a}_3$ を用いて、

$$\delta\hat{r}=\delta\hat{r}_0+x^3\delta\hat{a}_3 \qquad \text{(4)}$$

と表わすと、$\delta\hat{a}_3$ はシェル中央面が中央面の変位後の基ベクトル $\hat{a}_i$ の回りに回転することによって生じる変分であるが、中央面が $\hat{a}_3$ の回りに回転しても $\hat{a}_3$ は何ら変化は生じないことを考慮し、ベクトル $\delta\omega$ を

$$\delta\hat{a}_3\equiv\delta\omega\times\hat{a}_3 \qquad \text{(5)}$$

と定義する。ここに $\delta\,\omega$ の $\hat{a}_3$ 方向成分は零となるので、

$$\delta\,\boldsymbol{\omega} \equiv \delta\,\omega^{\alpha}\hat{a}_{\alpha} \qquad (6)$$

と表わされる。式（５）、（６）を考慮して、式（４）を（３）に代入し、微小ひずみの条件を適用して演算すると、シェルの中央面に関する仮想仕事式が、

$$\iint_{A_0}\sqrt{a}\,\hat{F}^{i}\,\delta\,\hat{r}_{0i}\,d\theta^{1}d\theta^{2}+\iint_{A_0}\sqrt{a}\,\hat{L}_{\alpha}\,\delta\,\omega^{\alpha}d\theta^{1}d\theta^{2}+\oint_{c}\{F^{\bar{1}\bar{i}}-\tilde{F}^{\bar{1}\bar{i}}+R^{\bar{1}\bar{j}}-\tilde{R}^{\bar{1}\bar{j}}\}\,\delta\,\hat{r}_{0\bar{i}}\,d\bar{\theta}^{2}$$
$$+\oint_{c}(L_{\bar{1}\bar{2}}-\tilde{L}_{\bar{1}\bar{2}})\,\delta\,\omega^{\bar{2}}d\bar{\theta}^{2}=0 \qquad (7)$$

と得られる。ここに、A_0 はシェルの中央面を、c は境界線を表し、記号の上に" − "が付してあるのは、境界線座標 $(\theta^{\bar{1}},\ \theta^{\bar{2}},\ x^{3})$ をあらわす。式（７）よりシェル中央面 A_0 におけるつり合い式は

$$\hat{F}^{i}=0\quad(i=1,\ 2,\ 3)\qquad \hat{L}_{\alpha}=0\quad(\alpha=1,\ 2)\qquad in\ A_0 \qquad (8a,\ b)$$

境界線Cにおける力学的境界条件は

$$\tilde{F}^{\bar{1}\bar{i}}+\tilde{R}^{\bar{1}\bar{j}}=F_{g}^{\bar{1}\bar{i}}+R_{g}^{\bar{1}\bar{j}}\ ,\qquad \tilde{L}_{\bar{1}\bar{2}}=L_{\bar{1}\bar{2}}^{g}\ ,\qquad on\ C \qquad (9a,\ b)$$

幾何学的境界条件は、

$$\hat{r}_{0\bar{i}}=\hat{r}^{g}_{0\bar{i}}\ ,\qquad \omega^{\bar{2}}=\omega^{\bar{2}}_{g}\quad on\ C \qquad (10a,\ b)$$

と求まる。式（７）における $\hat{F}^{i}$、$\hat{L}_{\alpha}$ はそれぞれシェル中央面の変位後の方向の合応力および合モーメントで表わされるつり合い式である。$\tilde{F}^{\bar{1}\bar{i}}$ ，$\tilde{R}^{\bar{1}\bar{i}}$ ，$\tilde{L}_{\bar{1}\bar{2}}$ は境界線上の合応力、置換力および合モーメントを表す。

式（１０ｂ）で与えた、モーメントに対応する幾何学的境界条件 $\omega^{\bar{2}}$ は変分形で表わされているので、これを位置ベクトル成分で表わす方法を検討する。

式（６）を（５）に代入し、交代テンソルを $\epsilon_{\bar{\beta}\bar{\alpha}3}$ とすると、

$$\delta\,\hat{a}_{3}=\delta\,\omega^{\bar{\alpha}}\,\epsilon_{\bar{\beta}\bar{\alpha}3}\hat{\bar{a}}^{\beta} \qquad (11)$$

と求まる。キルヒホッフラブの仮定を用いると、式（１１）より

$$\delta\,\omega^{\bar{2}}=-\hat{a}_{3}\,\delta\,\hat{\bar{a}}_{1}/\sqrt{\bar{a}} \qquad (12)$$

ここに、

$$\delta\,\hat{\bar{a}}_{1}\equiv\delta\,\hat{r}^{\bar{i}}_{0}|_{\bar{1}}\bar{a}_{i}\ ,\qquad \delta\,\hat{r}_{0}\equiv\delta\,\hat{r}^{\bar{i}}_{0}\bar{a}_{i} \qquad (13a,\ b)$$

一方、$\delta\,\hat{\bar{a}}_{1}$ を $\hat{\bar{a}}_{i}$ の成分で展開すると、

$$\delta\,\hat{\bar{a}}_{1}\equiv\delta\,\hat{\varphi}^{\bar{i}}\hat{\bar{a}}_{i} \qquad (14)$$

式（１３）と（１４）より

$$\delta\,\hat{\varphi}^{\bar{i}}=\delta\,\hat{r}^{\bar{j}}_{0}|_{\bar{1}}\,\beta^{\hat{\bar{i}}}_{\bar{j}}\ ,\qquad \beta^{\hat{\bar{i}}}_{j}\equiv\bar{a}_{j}\cdot\hat{\bar{a}}^{i} \qquad (15a,\ b)$$

式（１４）を（１２）へ代入すると、

$$\delta\,\omega^{\bar{2}}\equiv-\delta\,\hat{\varphi}^{\bar{3}}/\sqrt{\bar{a}}\ ,\qquad \delta\,\hat{\varphi}^{\bar{3}}=\delta\,\hat{r}^{\bar{i}}_{0}|_{\bar{1}}\,\beta^{\hat{\bar{3}}}_{\bar{i}} \qquad (16a,\ b)$$

式（１６）の $\beta^{\hat{\bar{3}}}_{\bar{i}}$ は式（１５ｂ）で定義されているように、位置ベクトル $\hat{r}_{0}$ の関数であるので、$\hat{\varphi}^{\bar{3}}$ を $\hat{r}^{\bar{i}}_{0}$ の陽な関数として表すのは一般的には困難である。そこで、任意に選んだ定ベクトル $\tilde{a}^{3}$ を

$$\tilde{a}^{3}\approx\hat{\bar{a}}^{3} \qquad (17)$$

と定め、これを式（１５ｂ）に代入すると、$\beta^{\hat{\bar{3}}}_{\bar{i}}$ の近似値 $\tilde{\beta}^{3}_{\bar{i}}$ が

$$\tilde{\beta}^{3}_{\bar{i}}\equiv\bar{a}_{\bar{i}}\cdot\tilde{a}^{3}\approx\beta^{\hat{\bar{3}}}_{\bar{i}} \qquad (18)$$

のように定数として求まる。式（１７）の $\tilde{a}^{3}$ はくりかえし演算途中に求まる $\hat{\bar{a}}^{3}$ に近似したベクトルと考えればよい。式（１８）を（１６ｂ）に代入すると、

$$\delta\,\hat{\varphi}^{\bar{3}}\approx\delta\,(\hat{r}^{\bar{i}}_{0}|_{\bar{1}}\tilde{\beta}^{3}_{\bar{i}}) \qquad (19)$$

と $\hat{\varphi}^{\bar{3}}$ が陽な関数として求まり、これを式（１６ａ）に代入すれば、$\omega^{\bar{2}}$ が $\hat{r}_{0}$ の陽な関数として求まる。

参考文献

1) Sakurai, T., Hasegawa, A: and Nishino, F.: A finite displacement formulation of elastic shells, Proc. of JSCE. No. 330, pp. 151-159, Feb.1983.