

法政大学 正会員 ○阿井正博
 東京大学 正会員 西野文雄

1. はじめに. 近年、純曲げなどの特定の有限変位状態を基準とした線形化理論を展開してその変形の上で生じる不安定問題が扱われるようになったが¹⁾、本文は、変位の大きさを制限しない薄肉はりの有限変位理論のもとで任意の変形状態を基準とした一般的な線形化基礎式を展開するものであり、例えば有限変位後の種々の不安定現象を一括して扱うことができる。

2. 有限変位薄肉はり理論. 線形化の対象として文献2)の理論を考える。空間で Cartesian座標 $\{x, y, z\}$ 、はりの軸線(G-線)の自然長であると座標を用いて、G-線の形状を $\{x_0(\xi), y_0(\xi), z_0(\xi)\}$ で表す。さらに、G-線の倍、主法線方向 $\{\tau, \kappa\}$ から断面主軸 $\{\xi, \eta\}$ までの軸線まわりの角度を $\phi(\xi)$ として、これらを基本の未知量とする。このとき、G-線の伸び率、断面 $\{\xi, \eta\}$ 方向の曲率および断面のねじれ率の組み $\{\varepsilon_0, \kappa_\xi, \kappa_\eta, \hat{\gamma}\}$ がひずみパラメータとなる。ただし、G-線の (ε_0) 以外の規格量である曲率 κ_0 、ねじれ率 γ_0 を用いて $\kappa_\xi = \kappa_0 \sin \phi$, $\kappa_\eta = \kappa_0 \cos \phi$, $\hat{\gamma} = \gamma_0 + \phi'$ と表せる(記号 $(\cdot)'$ は ξ に関する微分)。

特に つり合い式に注目すれば、断面の軸力 N 、 ξ, η を腕とする曲げモーメント成分 M_ξ, M_η 、バイモーメント M_w 、St.Venantのねじれモーメント T_S 、および 単位のねじれ率当たりの断面直応力による付加ねじれモーメント K を合応力として、微小ひずみの範囲で

$$N = i_{G\xi} \langle F_{(xyz)}(\xi) \rangle \{i_{(xyz)}\}$$

$$\frac{d}{d\xi} \langle M_{(\eta)} - M_{(\xi)}^T \rangle [\hat{T}] \{i_{(xyz)}\} + \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ x'_G & y'_G & z'_G \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} + \langle \hat{m}_x, \hat{m}_y, \hat{m}_z \rangle \{i_{(xyz)}\} = 0$$

$$T = M'_w + T_S + (\hat{\gamma} K)_{0.B} + \hat{m}_w \dots \dots \dots (1.a-c)$$

と表される。ただし、 $\{F_{(xyz)}(\xi)\}$ は、 $\xi=0$ での端面力と分布外力を用いて

$$\{F_{(xyz)}(\xi)\} = \{\bar{F}_{(xyz)}\}_0 - \int_0^\xi \{\bar{p}_{(xyz)}\} d\xi \dots \dots \dots (2)$$

と表される断面力成分： $i_x, \dots$ 等は添字の方向の単位ベクトル； $[\hat{T}(\xi)]$ は $\{\xi, \eta, \xi\}$ 方向の空間 $\{x, y, z\}$ 方向からの回転位置を規定する正規直交マトリックス； $\{\hat{m}_{(xyz)}\}$ と $\hat{m}_w$ は、それぞれ、分布外力モーメントの $\{i_{(xyz)}\}$ 成分 および分布外力バイモーメントであり 上添の $*$ は変形後に依存すること意味する。

3. 有限変位後の線形化. 前節の基礎式のもとにある任意のつり合い状態の微小変化を考える。前節の諸式を基本未知量 $\{x_0, y_0, z_0, \phi\}$ に関して直接 線形化する方法も考えられるが、ここでは先行つり合い状態に依存させた独立変分量を考える。G-線の微小変位をその倍、主法線、接線方向 $\{\tau, \kappa, \xi\}$ に分解して

$$\delta r_G(\xi) = \langle \delta u_\tau(\xi), \delta u_\kappa(\xi), \delta u_\xi(\xi) \rangle \{i_{G(\tau\kappa\xi)}(\xi)\} \dots \dots \dots (3)$$

と表せば、G-線上の ξ 方向基ベクトルの微小変化 $\delta r_G' = \langle \delta \alpha_{(\tau\kappa\xi)}(\xi) \rangle \{i_{G(\tau\kappa\xi)}\}$ は、 κ_0 と γ_0 を用いて

$$\begin{pmatrix} \delta \alpha_\tau \\ \delta \alpha_\kappa \\ \delta \alpha_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u'_\tau \\ \delta u'_\kappa \\ \delta u'_\xi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma_G & & \\ \gamma_G & & \kappa_G \\ & -\kappa_G & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_\tau \\ \delta u_\kappa \\ \delta u_\xi \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

となる。つぎに、この変位後で軸線まわりで回転していない $\{\xi, \eta\}$ 方向を仮に決定した後、それを基準とした断面の微小回転を $\delta \psi(\xi)$ とする。これらの $\{\delta u_\tau, \delta u_\kappa, \delta u_\xi, \delta \psi\}$ によるひずみパラメータの変化は、微小ひずみの範囲で、次のように得られる。

$$\delta \varepsilon_G = \delta \alpha_\xi, \quad \hat{\delta \gamma} = -\kappa_G \delta \alpha_\tau + \delta \psi'$$

$$\delta \kappa_\xi = \cos \phi (\delta \alpha'_\tau - \gamma_G \delta \alpha_\kappa) + \sin \phi (\delta \alpha'_\kappa + \gamma_G \delta \alpha_\tau) + \kappa_\eta \delta \psi$$

$$\delta \kappa_\eta = -\sin \phi (\delta \alpha'_\tau - \gamma_G \delta \alpha_\kappa) + \cos \phi (\delta \alpha'_\kappa + \gamma_G \delta \alpha_\tau) - \kappa_\xi \delta \psi \dots \dots \dots (5.a-d)$$

以上の幾何学的な変分量を用いて、式(1.a-c)のつり合い式は次のように線形化される。

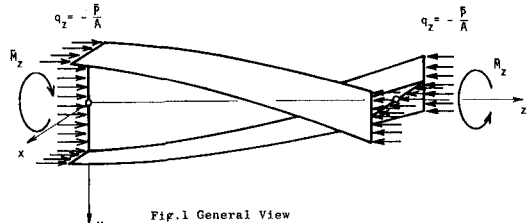
$$\begin{aligned} \delta N &= \langle F_{(xyz)} \rangle [T_G]^T \{ \delta \alpha_\tau, \delta \alpha_\kappa, 0 \} + \langle x'_G, y'_G, z'_G \rangle \{ \delta F_{(xyz)} \}, \\ \frac{d}{d\zeta} (\langle \delta M_{(n)}, -\delta M_{(\xi)}, \delta T \rangle [T] &+ \langle M_{(n)}, -M_{(\xi)}, T \rangle [\delta \hat{\Psi}] [T]) \{ i_{(xyz)} \} \\ &+ \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ \delta \alpha_{(\tau\kappa\zeta)} & \delta \alpha_{(\tau\kappa\zeta)} & \delta \alpha_{(\tau\kappa\zeta)} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} [T_G] + \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ x'_G & y'_G & z'_G \\ \delta F_x & \delta F_y & \delta F_z \end{vmatrix} + \langle \delta m_x^*, \delta m_y^*, \delta m_z^* \rangle \{ i_{(xyz)} \} = 0, \\ \delta T &= \delta M_w^* + \delta T_s + (\hat{\gamma} \delta K + K \delta \hat{\gamma})_0 B + \delta m_w^* \dots \dots \dots (6.a-c) \end{aligned}$$

ただし、 $\{ \delta F_{(xyz)}(\zeta) \} = \{ \delta \bar{F}_{(xyz)} \}_0 - \int_0^\zeta \{ \delta \bar{P}_{(xyz)} \} d\zeta \dots \dots \dots (7)$

ここに、 $[T_G(\zeta)]$ は $\{\tau, \kappa, \zeta\}$ - $\{x, y, z\}$ 方向間の正規直交変換マトリックスであり、また δ を付していない諸量はすべて先行状態での既知量である。

4. ねじれと軸力を受ける2軸対称閉断面はりの横座屈。 解析例として、軸力 $\bar{P}$ と純ねじれ $\bar{M}_z$ を受ける単純支持された薄肉はり(回転は $\zeta=0$ で断面 η 軸を空間 x - y 面内に拘束)の横座屈を考える(Fig.1)。座屈前で一様直線変形状態にあり、 G -線の $\{\tau, \kappa\}$ 方向は不定であるが、ここでは断面の $\{\xi, \eta\}$ 軸に一致させて展開を進める。一様な伸び率、ねじれ率を $\bar{\epsilon}, \bar{\gamma}$ と表して、このとき

$$\begin{aligned} x_G(\zeta) &= 0 \\ y_G(\zeta) &= 0 \\ z_G(\zeta) &= (1+\bar{\epsilon})\zeta \\ \phi(\zeta) &= 0 \dots \dots (8.a-d) \end{aligned}$$



であり、2軸対称断面の構成式に

$\{ \epsilon_\xi, \kappa_\xi, \kappa_\eta, \hat{\gamma} \} = \{ \bar{\epsilon}, 0, 0, \bar{\gamma} \}$ を代入した後、 $N = -\bar{P}, T_s + \bar{\gamma} K = \bar{M}_z$ の関係より $\bar{\gamma}$ を決定する方程式

$$\frac{E}{2} (I_{GG} - \frac{I_G^2}{A}) \bar{\gamma}^3 + \{ GJ_S - \frac{I_G}{A} \bar{P} - \frac{E}{2} (I_{GG} - \frac{I_G^2}{2}) \gamma^0{}^2 \} \bar{\gamma} - (GJ_S \gamma^0 + \bar{M}_z) = 0 \dots (9)$$

が得られる。ただし、 A, I_G, I_{GG}, J_S は断面積、極2次、4次モーメント、ねじれ定数； E, G は弾性、せん断弾性定数； γ^0 は初期ねじれ率を表す。3節の線形化一般式にこれらの変形条件を代入して整理すれば、 $\{ \delta u_\tau, \delta u_\kappa \}$ の変位は $\{ \delta u_\xi, \delta \phi \}$ と独立であることが解り、 $\{ \delta u_\tau, \delta u_\kappa \}$ にのみ注目して力学的境界条件のもとにひき合い式を1回積分した後 構成関係を代入すれば、座屈を決定する斉次形境界値問題として

$$\begin{bmatrix} EI_{\xi\xi} D^2 + (\bar{P} + \bar{\gamma} \bar{M}_z - \bar{\gamma}^2 EI_{\xi\xi}), & (\bar{M}_z - 2\bar{\gamma} EI_{\xi\xi}) D \\ (\bar{M}_z - 2\bar{\gamma} EI_{\eta\eta}) D, & -EI_{\eta\eta} D^2 - (\bar{P} + \bar{\gamma} \bar{M}_z - \bar{\gamma}^2 EI_{\eta\eta}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_\tau \\ \delta u_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots (10)$$

を得る(B.C.:両端で $\{ \delta u_\tau, \delta u_\kappa \} = \{ 0, 0 \}$)。これを、 $\bar{P}=0$ の純ねじれの場合で解くと

$$i) \frac{\bar{M}_z}{EI_{\eta\eta}} < \frac{\bar{M}_z}{EI_{\xi\xi}} < \bar{\gamma} \text{ のとき } 2v_\xi v_\eta (1 - \cos \bar{\gamma} l \cos \alpha l) = (v_\xi^2 + v_\eta^2) \sin \bar{\gamma} l \sin \alpha l \dots (11.a)$$

$$ii) \frac{\bar{M}_z}{EI_{\eta\eta}} < \bar{\gamma} < \frac{\bar{M}_z}{EI_{\xi\xi}} \text{ のとき } \begin{aligned} &-4v_\xi v_\eta + \{ 2v_\xi v_\eta \cos \bar{\gamma} l - (v_\xi^2 - v_\eta^2) \sin \bar{\gamma} l \} \exp(\alpha l) \\ &+ \{ 2v_\xi v_\eta \cos \bar{\gamma} l + (v_\xi^2 - v_\eta^2) \sin \bar{\gamma} l \} \exp(-\alpha l) = 0 \dots \dots (11.b) \end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha = \sqrt{ \left(\bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\xi\xi}} \right) \left(\bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\eta\eta}} \right) }, \quad v_\xi = \frac{\sqrt{ \left| \bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\xi\xi}} \right| }}{2\bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\xi\xi}}}, \quad v_\eta = \frac{\sqrt{ \left| \bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\eta\eta}} \right| }}{2\bar{\gamma} - \frac{\bar{M}_z}{EI_{\eta\eta}}} \dots (12.a-c)$$

の座屈条件式が得られる。(12.a-c)の介在した式(9),(11.a, or b)を $\bar{M}_z$ と $\bar{\gamma}$ に関して数値的に解いて座屈が決定せられる。 <参考文献> 1) Vacharajiffiphan & Trahair: J. of Str.Div., ASCE, Vol.101, No.ST6, Jun.1975; 2) 阿井・西野:土木学会論文報告集, No.318, 1982-2.