

接線剛性法における解の精度に及ぼす 多節点要素座標系の影響

佐賀大学 学生員○宮崎厚志

佐賀大学 正員 井嶋克志

佐賀大学 正員 後藤茂男

1. まえがき

既に、著者等の一人によって、要素変形と節点変位との適合条件の非線形性に起因する接線幾何剛性の定式化が行われ、これより導かれる接線幾何剛性方程式は、要素剛性に起因する接線剛性と完全に分離され節点変位を含まない既知先行つりあい状態の要素力と要素形状のみの関数で表わされる単純明快なものであることが示された。

本研究は、この接線剛性法において、設定される分割要素の力学モデルによって解の精度が異なることに着目し、計算の効率化を計るための検討を行ったものである。即ち、有限要素構造物における既知つりあい状態から剛体変位後の要素変形において、剛体変位を拘束する仮想静定系の支点条件を種々変えることにより接線幾何剛性係数が異なり、その結果、解の精度も異なってくる。したがって、本研究は多節点要素について2つの場合の各要素の支点条件を仮定し、それぞれについて接線幾何剛性係数を示すとともに、板要素について数値計算を行い、設定する要素座標系による解の精度の検討を行ったものである。

2. 接線剛性法

立体構造物の一構成要素について、先行つりあい状態での要素座標系に関する節点力ベクトルを \mathbf{U} 、剛体変位を拘束する静定な支点条件より可動方向の独立な節点力からなる要素力ベクトルを \mathbf{S} とする。

いま、先行要素座標系に関する節点力が $\Delta \mathbf{U}$ 増加して節点変位 $\Delta \mathbf{u}$ が発生し支点条件に関する要素力が $\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}$ 、要素変形が $\Delta \mathbf{s}$ となり再び平衡状態になり、接線剛性方程式が

$$(K_o + K_g) \delta \mathbf{u} \equiv K_T \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{U} \quad (1)$$

(K_o :要素剛性マトリックス, K_g :接線幾何剛性マトリックス)

と表わされるものとすれば、次式のように K_g の i 行 j 列要素は先行要素力と要素変形増分によって要素に蓄えられるひずみエネルギーの変位による2回微分により求まる。

$$K_{gij} = \partial \Lambda / \partial u_i \partial u_j \quad (2)$$

全体構造系での接線剛性法における反復公式は反復回数を r とすると、

$$\Delta \mathbf{u}_{r+1} = \Delta \mathbf{u}_r + K_T^{-1} (J_r, S_r) \cdot (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U} - J_r \cdot S_r) \quad (J: 座標変換マトリックス) \quad (3)$$

で表わされる。ここで、節点変位 $\Delta \mathbf{u}_r$ から要素変形 $\Delta \mathbf{s}_r$ 、 $\Delta \mathbf{s}_r$ から要素力 $\Delta \mathbf{S}_r$ の算出過程において、厳密な幾何学的適合条件および要素剛性方程式を用いれば、数学的なNewton-Raphson法と等価となり、きわめて安定した収束性を示すものとなる。

3. 要素座標系と基本寸法

総節点数 n の多節点要素において、図-1のように要素座標系 ω を設定する。基準座標系 W に関する要素節点の座標ベクトルを u_i とし、

$$u_{ij} = u_i - u_j \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

とする。また、要素の基本寸法は図-2に示すものとし各節点の位置を要素座標系において、節点 i で (c_i, a_i, f_i) と表わす。基準座標系に関する x, y, z 各軸の方向余弦ベクトルより、要素座標系を基準座標系に変換する座標変換マトリックスは次式で表わされる。

$$\alpha = [a u_{10} \ b u_{20} - c u_{10} \ u_{10} \times u_{20}] / ab \quad (5)$$

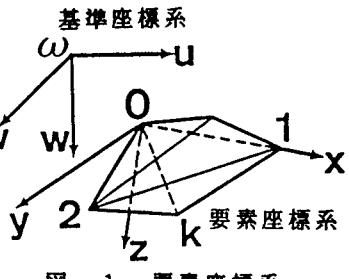


図-1 要素座標系

本研究において仮定した支点条件は、表-1, 2に示す。

3.1 TYPE 1

剛体変形後の要素座標系 ω' において静定な支点条件を表-1のように設定した場合、独立な要素力ベクトルは節点力を U_i, V_i, W_i 、節点モーメントを X_i, Y_i, Z_i とすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & [\mathbf{X}_0^T \mathbf{U}_1 \mathbf{X}_1^T \mathbf{U}_2 \mathbf{X}_2^T \mathbf{U}_3^T \mathbf{X}_3^T \\ & \cdots \mathbf{U}_i^T \mathbf{X}_i^T \cdots \mathbf{U}_n^T \mathbf{X}_n^T]^T \quad (6) \\ \text{ここに, } \mathbf{U}_i = & [U_i \ V_i \ W_i]^T; \mathbf{X}_i = [X_i \ Y_i \ Z_i]^T \quad (7) \\ \text{となる。また独立な要素変形は、要素力ベクトルに対応し} \\ \Delta \mathbf{s} = & [\Delta \theta_0^T \Delta b \Delta \theta_1^T \Delta c \Delta a \Delta \theta_2^T \\ & \cdots \Delta a_i^T \Delta \theta_i^T \cdots \Delta a_n^T \Delta \theta_n^T] \quad (8) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta \theta_i = [\Delta \theta_{xi} \ \Delta \theta_{yi} \ \Delta \theta_{zi}]^T$: 節点*i*の回転ベクトル

$\Delta a_i = [\Delta c_i \ \Delta a_i \ \Delta f_i]^T$: 節点*i*の変位ベクトルとなり、剛体変形後の座標系 ω' において、原点から変形後の各節点へのベクトルを

$$a_i + \Delta a_i = [c_i + \Delta c_i \ a_i + \Delta a_i \ f_i + \Delta f_i]^T \quad (9)$$

とし、基準座標系からの各節点変位 Δu_{io} 、座標系 ω' を基準座標系 ω へ変換する座標変換マトリックス α' とすれば

$$\Delta a_i = \alpha'^T (u_{io} + \Delta u_{io}) - a_i \quad (10)$$

が成立つ。一方、 $\omega = \alpha \omega'$ であるから*i*節点の ω から変形後の要素端座標系 ω_i^* への回転軸ベクトルを Δx_i とすれば

$$\omega_i^* = \Phi(\Delta x_i) \omega : \omega_i^* = \Phi(\Delta \theta_i) \omega' \quad (\Phi: 座標変換マトリックス) \quad (11)$$

$$\therefore \Delta \theta_i = \Phi^{-1} \{\Phi(\Delta x_i) \alpha\} \quad (12)$$

が成立し、以上の式(10)(12)より $\Delta a_i, \Delta \theta_i$ について節点変位の2次の項まで展開表示し、要素変形増分 Δs により蓄えられるポテンシャルエネルギーは

$$\Lambda = \Sigma (U_i \Delta a_i + X_i \Delta \theta_i) \quad (13)$$

となり、上式を式(2)に代入すれば接線幾何剛性係数が得られる。

3.2 TYPE 2

静定な支点条件を表-2のように設定した場合、独立な要素力ベクトルは次式で表わされる。

$$\mathbf{S} = [\mathbf{U}_1^T \mathbf{X}_1^T \mathbf{U}_2^T \mathbf{X}_2^T \cdots \mathbf{U}_i^T \mathbf{X}_i^T \cdots \mathbf{U}_n^T \mathbf{X}_n^T]^T \quad (14)$$

これに対応する要素変形ベクトルは

$$\Delta \mathbf{s} = [\Delta a_1^T \Delta \theta_1^T \Delta a_2^T \Delta \theta_2^T \cdots \Delta a_i^T \Delta \theta_i^T \cdots \Delta a_n^T \Delta \theta_n^T] \quad (15)$$

剛体変形後の節点0から*i*へのベクトルを u_{io}' とすれば、変位ベクトルは

$$\Delta a_i = \alpha^T (u_{io} + \Delta u_{io}) - u_{io}' \quad (16)$$

となる。また、 ω と ω' の関係より3.1と同様にして次式が成立つ。

$$\Delta \theta_i = \Phi^{-1} \{\Phi(\Delta x_i) \alpha\} \quad (17)$$

以上の式(16)(17)より $\Delta a_i, \Delta \theta_i$ については3.1と同様に展開表示し、ポテンシャルエネルギーは

$$\Lambda = \Sigma (U_i \Delta a_i + X_i \Delta \theta_i) \quad (18)$$

となり、これを式(2)に代入すれば

接線幾何剛性係数が得られる。

なお、数値計算例については、講演時に発表する。

参考文献：後藤茂男 土木学会論文報告集 No.335, 1983,

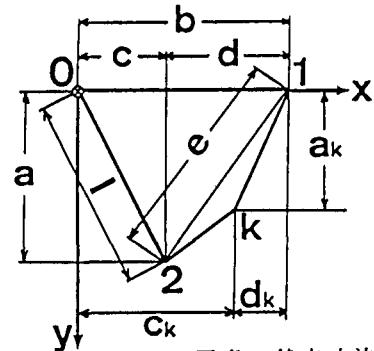


図-2 要素の基本寸法

節点	x 方向		y 方向		z 方向	
	変位	回転	変位	回転	変位	回転
0	拘束	可動	拘束	可動	拘束	可動
1	可動	可動	拘束	可動	拘束	可動
2	可動	可動	可動	可動	拘束	可動
k=3-n	可動	可動	可動	可動	可動	可動

表-1 TYPE 1

節点	x 方向		y 方向		z 方向	
	変位	回転	変位	回転	変位	回転
0	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束
1	可動	可動	可動	可動	可動	可動

表-2 TYPE 2