Ⅰ-7　有限ひずみ仮想仕事の定理による有限要素解析

熊本大学工学部　正　員　　三池　亮次
〃　　　　正　員　○小林　一郎
〃　　　　学生員　　米村　広宣

1．はじめに　近年、有限変形、とくに幾何学的非線形の有限変形解析の広範にわたり精細な研究が行なわれている。その多くは、Green ひずみテンソル$\mathbb{G}$とKirchhoff 応力テンソル$\mathbb{T}_K$ の積によってひずみエネルギーを表すエネルギー理論に基づくものである。筆者の一人は[1]先に有限変位仮想仕事の定理において、変位がかなり大きい場合には、Kirchhoff 応力にかかり内部仮想仕事を定めるひずみとして、Green ひずみに加えるに非線形ひずみ補正項$\mathbb{E}_\theta$ を考慮すべきことを指摘した。Kirchhoff 応力$\mathbb{T}_K$ はその中にひずみ成分を含むため$\mathbb{T}_K$ の物理的意味は不明瞭となる。Kirchhoff 応力の代りに、埋め込み移動座標軸方向の成分をもつ物理的応力マトリックスΣを用いる場合、Σと対になり内部仮想仕事を定めるひずみは、骨組部材に対し、埋め込み座標軸方向の工学的ひずみに加えるにある回転を表す補正項を必要とすることを述べた[2]。ここでは、提案された有限ひずみ仮想仕事の定理の有限変形有限要素解析への応用を試みる。

2．有限ひずみ（更新Lagrange流）仮想仕事の定理　物体が内部の任意点に物体力$\mathring{\mathbf{f}}$と境界における任意点に表面力$\mathring{\mathbb{P}}$を受け、変形の中間状態（位置ベクトル$\mathbf{x}$）から有限の変位（位置ベクトル$\Delta\mathbf{u}$）を生じ、釣り合い状態にあるものとする。外力のなす外部仮想仕事$\Delta W'$ は変形後のKirchhoff 応力$\mathring{\mathbb{T}}_K$ と式 (3)で定義されるひずみテンソル$\Delta\mathbb{E}_K$ で与えられる内部仮想仕事$\Delta U'$ に等しく、

$$\Delta W' = \int_A \mathring{\mathbb{P}}\cdot\Delta\mathbf{u}\,dA + \int_V \mathring{\mathbf{f}}\cdot\Delta\mathbf{u}\,dV = \int_{V'} \mathrm{trace}(\mathring{\mathbb{T}}_K{}^T\Delta\mathbb{E}_K)\,dV' = \Delta U' \tag{1}$$

ここに、dVは変形後の、dV' は変形の中間状態における体積要素で、dAは変形後の面積要素である。また、Kirchhoff 応力は、

$$\dot{\mathbb{T}}_K{}^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0 \\ & \frac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & \frac{\delta A_3}{\delta A_3'} \end{bmatrix} \dot{\Sigma}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix},\quad \dot{\Sigma}^T = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{12} & \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{21} & \dot{\sigma}_{22} & \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{31} & \dot{\sigma}_{32} & \dot{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

g_{ii}は計量テンソル$\mathbb{G} = (\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}')^T\,\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}'$ の第 i 番目の対角要素である。$\delta A_i/\delta A_i'$ は変形後と中間状態における応力の作用する断面積変化率である。

$$\Delta\mathbb{E}_K = \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}'} = \Delta\mathbb{E}_g + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}'}\right)^T \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}'} \tag{3}$$

$\Delta\mathbb{E}_g$はGreen ひずみテンソルで、$\mathbf{x}'$ は物体内部の任意点の中間状態における位置ベクトルで、$\mathbf{x}$はその点の変形後の位置ベクトルである。また、上式のJacobianマトリックスは、

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}'} = \left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x_1'}\ \ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x_2'}\ \ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x_3'}\right] = \left[\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2\ \ \mathbf{e}_3\right] \tag{4}$$

ここに、$\mathbf{e}_i$ は共変基底ベクトルで変形の中間状態において埋め込まれた直交座標線の変形後の方向を定めるベクトル、その方向余弦は$\mathbf{l}_i = \mathbf{e}_i/\sqrt{g_{ii}}$である。

3．平面応力、有限変形、有限要素解析　式 (1)で与えられる、単位体積当りの内部仮想仕事の増分ΔUに式 (2)～ (4)を用いると平面応力状態においては、既に発表のとおり[2]

$$\begin{aligned} \Delta U &= \mathrm{trace}\,(\mathring{\mathbb{T}}_K{}^T\Delta\mathbb{E}_K) \\ &= \dot{\sigma}_{11}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'}\left\{\frac{\partial\Delta u_{e1}}{\partial x_1'} + (1-\mathrm{COS}\,\Delta\theta_1)\right\} + \dot{\sigma}_{22}\frac{\delta A_2}{\delta A_2'}\left\{\frac{\partial\Delta u_{e1}}{\partial x_2'} + (1-\mathrm{COS}\,\Delta\theta_2)\right\} \\ &\quad + \dot{\sigma}_{12}\frac{\delta A_1}{\delta A_1'}\left(\mathrm{SIN}\,\Delta\gamma - \mathrm{SIN}\,\Delta\theta_2 + \mathrm{SIN}\,\Delta\gamma\frac{\partial\Delta u_{e1}}{\partial x_1'}\right) \\ &\quad + \dot{\sigma}_{21}\frac{\delta A_2}{\delta A_2'}\left(\mathrm{SIN}\,\Delta\gamma - \mathrm{SIN}\,\Delta\theta_1 + \mathrm{SIN}\,\Delta\gamma\frac{\partial\Delta u_{e2}}{\partial x_2'}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

ここに、$\partial\Delta u_{ei}/\partial x_i' \equiv \Delta e_{ii}$は、図1に示されるように埋め込み$x_i$軸方向の中間状態を基準とした伸び率（以下、軸ひずみ）、$\Delta\theta_i$はx_i'軸の回転角、$\Delta\gamma$はせん断ひずみで$\Delta\gamma=\Delta\theta_1+\Delta\theta_2$である。

有限ひずみが比較的小さいとき、物理的応力$\sigma_{12}=\sigma_{21}$、また$\sin\Delta\gamma \fallingdotseq \Delta\gamma$と見なし得るので式 (5)の内部仮想仕事は

$$\Delta U=(\boldsymbol{\sigma}'+\Delta\boldsymbol{\sigma}')^{T}\Delta\mathbf{e}' \qquad (6)$$

のように表すことができる。ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}'+\Delta\boldsymbol{\sigma}'=\mathbb{A}(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}) \qquad (7)$$

$$\Delta\mathbf{e}'=\Delta\mathbf{e}+\Delta\mathbf{e}_\theta \qquad (8)$$

$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{11}\ \ \sigma_{22}\ \ \sigma_{12}]^T$は変形の中間状態における物理的応力ベクトル、$\Delta\sigma$はその増分、$\sigma+\Delta\sigma$は変形後の物理的応力で、式 (5)の$[\mathring{\sigma}_{11}\ \ \mathring{\sigma}_{22}\ \ \mathring{\sigma}_{12}]^T$がこれに相当する。$\mathbb{A}$は応力の作用する断面積の変化率を対角要素にもつマトリックスで

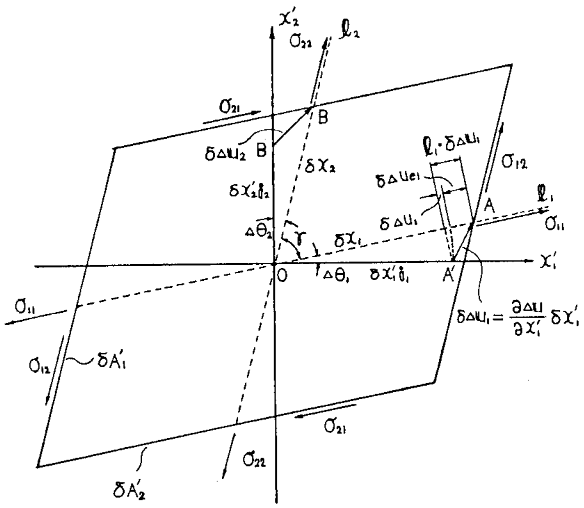

図1　変形の中間状態における直方体の変形と、これに作用する物理的応力σ_{ij}

$$\mathbb{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{\delta A_1}{\delta A_1'} & & 0\\ & \dfrac{\delta A_2}{\delta A_2'} & \\ 0 & & 1+\Delta\beta_1\end{bmatrix} \qquad (9)$$

平面応力状態においては、図1においてOA$=\delta x_1$,OB$=\delta x_2$ 板の厚さを中間状態でt'、変形後にtとすると

$$\frac{\delta A_1}{\delta A_1'}=\frac{\delta x_2\ \ t}{\delta x_2'\ t'}=(1+\Delta e_{22})(1+\Delta e_{33})\fallingdotseq 1+\Delta e_{22}+\Delta e_{33},\quad \frac{\delta A_2}{\delta A_2'}\fallingdotseq 1+\Delta e_{11}+\Delta e_{33} \qquad (10)$$

Δe_{33}は面に垂直方向のひずみで、平面応力の場合

$$\Delta e_{33}=-\frac{\lambda}{\lambda+2G}(\Delta e_{11}+\Delta e_{22})=-\frac{\nu}{1-\nu}(\Delta e_{11}+\Delta e_{22}) \qquad (11)$$

更新Lagrange流Green ひずみを$\Delta\mathbf{e}_g=[\Delta e_{g11}\ \ \Delta e_{g22}\ \ \Delta e_{g12}]^T$、軸ひずみおよびせん断ひずみは

$$\Delta e_{ii}=\sqrt{1+2\Delta e_{gii}}-1\fallingdotseq\Delta e_{gii}\quad ,\quad \Delta\gamma=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}\Delta e_{g12} \qquad (12)$$

式 (8)はひずみベクトルで$\Delta\mathbf{e}=[\Delta e_{11}\ \ \Delta e_{22}\ \ \Delta\gamma]^T$。$\Delta\mathbf{e}_\theta$はひずみ$\Delta\mathbf{e}$の補正項で　$\Delta\mathbf{e}_\theta=[1-\cos\Delta\theta_1\ 1-\cos\Delta\theta_2\ \Delta\beta_2]^T$。また、せん断ひずみに関する補正項$\Delta\beta_1$,$\Delta\beta_2$を考慮する。平面応力の場合

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{D}\Delta\mathbf{e} \qquad (13)$$

の関係が成立するものとする。式 (9)～(13)を式 (7)と (8)に用い、式 (6)の内部仮想仕事のΔUを$\Delta\mathbf{e}$の関数として表すことができる。

（i，j，k）の節点をもつ第Ｉ番目の三角形を有限要素とし、一つの有限要素内部で応力が一定の仮定を設ける場合、有限要素Ｉの外部仮想仕事$\Delta W=(\mathbb{P}_{ijk}+\Delta\mathbb{P}_{ijk})^T\Delta\mathbf{d}_{ijk}$、($\mathbb{P}_{ijk}$は節点外力、$\Delta\mathbf{d}_{ijk}$は節点変位増分）を内部仮想仕事$\Delta U'=\Delta U A' t'$（Aは中間状態有限要素断面積　）に等しくおき、有限要素基礎式を誘導することができる。

参考文献　１）三池亮次：有限変形における増分形エネルギー基礎理論、土木学会論文集 309号．
２）三池亮次、小林一郎：一有限ひずみ仮想仕事原理による構造解析、土木学会年講、昭和60年 9月．