I-4　高次理論による平板の連成熱弾性振動解析

呉工業高等専門学校　正会員　丸上　晴朗
山梨大学教学部　正会員　平島　健一

1．緒言　高次理論を用いて力学場と温度場の連成作用を考慮した平板の振動理論の定式化[1,2]を行い，高次理論における具体的熱伝導方程式，エネルギー方程式及び連成熱弾性振動方程式を求めた．これらの方程式は全て有限項からなる２次元化された式になっており，これらの式中の一方向（ｙ方向）の座標成分に関する項を全部削除するとはりの場合の支配式になる．この場合の数値計算例については昨年本学会で発表したが，この後さらに計算結果が得られたのでこれを追加して４．に示す．平板についても数値計算を行う．

2．高次理論の一般的支配式及び境界条件式

詳細は昨年発表[3]しているので，具体的支配方程式の誘導に必要な最小限度の式だけを示す．以下の式は解析上必要な全物理量を板厚方向座標ｚのベキ級数に展開した場合の支配式である．物理量をＦｏｕｒｉｅｒ級数に展開した場合にはこれより少し複雑な支配式になるが，ここではそれらの式は省略する．

熱伝導法則に関する修正Ｆｏｕｒｉｅｒ法則を２次元化した方程式．

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\tau_0^{(m,n)}\dot{q}_i^{(m)}+B_{mn}q_i^{(m)}+\kappa_{i\alpha}^{(m,n)}T_{,\alpha}^{(m)}+(m+1)\kappa_{iz}^{(m,n)}T^{(m+1)}\right\}=0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

エネルギー平衡方程式を２次元化した方程式．

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[-B_{mn}\left\{q_{\alpha,\alpha}^{(m)}+(m+1)q_z^{(m+1)}\right\}+\rho^{(m,n)}g^{(m)}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\left[(\rho c_v)^{(m,n)}\dot{T}^{(m)}-T_0\left\{\hat{\beta}_{i\alpha}^{(m,n)}\dot{u}_{i,\alpha}^{(m)}+(m+1)\hat{\beta}_{iz}^{(m,n)}\dot{u}_i^{(m+1)}\right\}\right] \qquad \cdots\cdots (2)$$

連成熱弾性振動方程式を２次元化した方程式．

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left\{c_{\alpha j\beta l}^{(m,n)}u_{l,\alpha\beta}^{(m)}+(m+1)c_{\alpha jzl}^{(m,n)}u_{l,\alpha}^{(m+1)}+\hat{\beta}_{\alpha j}^{(m,n)}T_{,\alpha}^{(m)}\right\}-n\left\{c_{zj\beta l}^{(m,n-1)}u_{l,\alpha\beta}^{(m)}+(m+1)c_{zjzl}^{(m,n-1)}u_l^{(m+1)}+\hat{\beta}_{zj}^{(m,n-1)}T^{(m)}\right\}\right]$$
$$+F_j^{(n)}+f_j^{(n)}=\sum_{m=0}^{\infty}\rho^{(m,n)}\ddot{u}_j^{(m)} \qquad \cdots\cdots (3)$$

力学的境界条件．$\int_{-b}^{b}z^n\,(n_\alpha\tau_{\alpha j})_c\,dz=n_\alpha\,\tau_{\alpha j}^{(n)}$ 　　　　$\cdots\cdots (4)$

幾何学的境界条件．$\bar{u}_j^{(n)}=u_j^{(n)}$ 　　　　$\cdots\cdots (5)$

熱伝導の境界条件．$(n+1)\,T^{(n+1)}=h\,(T_A^{(n)}-T^{(n)})$ 　　　　$\cdots\cdots (6)$

ｈは相対熱伝達率，T_A は周囲温度T_A のｚのベキ級数展開の第ｎ次成分である．

3．周辺単純支持長方形板の連成熱弾性振動解析

変位，熱流束，温度及び熱源をｚのベキ級数に展開した場合，z^3 の項までを用いて各物理量を近似表現した場合（３ｒｄ−Ｏｒｄｅｒと言うことにする．）について，２．の一般的方程式及び境界条件式を有限項の具体的方程式及び境界条件式に直しこれらを解析の基礎式として用いる．解析精度を高めるためにはz^3 項よりもなお高次項までを採用すればよいが，本報においては３ｒｄ−Ｏｒｄｅｒの場合に限定して考えることにする．平板が等質な材料の場合には面内（伸縮）挙動と面外（曲げ）挙動を規定する方程式系がお互いに分離されて解析が容易になるので，等質等方性平板の面外挙動の解析を行う．方程式と境界条件式を無次元化して用いるために次の無次元量を導入する．$\bar{x}=x/l_x$，$\bar{y}=y/l_y$，$\bar{z}=z/b$，$\bar{t}=\kappa t/(b^2\rho c)$ 　　$\cdots\cdots (7)$

但し，l_x, l_y はそれぞれｘ，ｙ軸方向の辺長，ｂは板厚の半分，κは熱伝導率，ρは密度，c_v は等積比熱とする．

変位ｕ，熱流束ｑ，温度分布Ｔ，熱源ｇとこれらを無次元化した場合の$\bar{u}$，$\bar{q}$，$\bar{T}$，$\bar{g}$との関係式は次のようになる．

$\bar{u}_\alpha(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\bar{z}\overline{u_\alpha^{(1)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+\bar{z}^3\overline{u_\alpha^{(3)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=u_\alpha(x,y,z,t)/b$，$\bar{u}_z(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\overline{u_z^{(0)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+z^2\overline{u_z^{(2)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=u_z(x,y,z,t)/b$，$\bar{q}_\alpha(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\bar{z}\overline{q_\alpha^{(1)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+\bar{z}^3\overline{q_\alpha^{(3)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=l_\alpha q_\alpha(x,y,z,t)/(\kappa T_0)$，$\bar{q}_z(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\overline{q_z^{(0)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+\bar{z}^2\overline{q_z^{(2)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=bq_z(x,y,z,t)/(\kappa T_0)$，$\bar{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\bar{z}\overline{T^{(1)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+\bar{z}^3\overline{T^{(3)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=T(x,y,z,t)/T_0$，
$\bar{g}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})=\bar{z}\overline{g^{(1)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})+\bar{z}^3\overline{g^{(3)}}(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=b^2\rho g(x,y,z,t)/(\kappa T_0)$ 　　$\cdots\cdots (8)$

上式中の無次元関数$\bar{u}^{(1)}_{\alpha}(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{t})$，$\bar{u}^{(3)}_{\alpha}(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{t})$，…等は全て$\bar{x}$，$\bar{y}$及び$\bar{t}$の関数であるが，以下においてはそれぞれを$\bar{u}^{(1)}_{\alpha}$，$\bar{u}^{(3)}_{\alpha}$，……のように略記することにする．（１），（２），（３）式から項数打ち切りによって３ｒｄ－Ｏｒｄｅｒの場合における支配式を求め，これらの支配式を（７），（８）式を用いて無次元化支配式にすると１６個の面外挙動を定める方程式が求まり，境界条件（４），（５），（６）も無次元化式にすることができる．ここでは紙面の都合上無次元化方程式の一部だけを列記する．

$$\bar{q}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}}/l_x^2+\bar{q}^{(1)}_{\bar{y},\bar{y}}/l_y^2+(2\bar{q}^{(2)}_{\bar{z}}-\bar{g}^{(1)}+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{t}})/b^2+(3\lambda+2G)\hat{\alpha}(\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}\bar{t}}/l_x+\bar{u}^{(1)}_{\bar{y},\bar{y}\bar{t}}/l_y+2\bar{u}^{(2)}_{\bar{z},\bar{t}}/b)/(b\rho c_v)=0,\quad \tau_0\kappa\bar{q}^{(1)}_{\alpha,\bar{t}}/(b^2\rho c_v)+\bar{q}^{(1)}_{\alpha}+\bar{T}^{(1)}_{,\bar{\alpha}}=0,$$

$$5b^2\left[G(\bar{u}^{(1)}_{\alpha,\bar{x}\bar{x}}/l_x^2+\bar{u}^{(1)}_{\alpha,\bar{y}\bar{y}}/l_y^2)+(\lambda+G)(\bar{u}^{(1)}_{\bar{x},\bar{x}\bar{\alpha}}/l_x+\bar{u}^{(1)}_{\bar{y},\bar{y}\bar{\alpha}}/l_y)/l_\alpha+(2\lambda-G)\bar{u}^{(2)}_{\bar{z},\bar{\alpha}}/(bl_\alpha)-(3\lambda+2G)\hat{\alpha}T_0\bar{T}^{(1)}_{,\bar{\alpha}}/(bl_\alpha)\right]+3b^2\left[G(\bar{u}^{(3)}_{\alpha,\bar{x}\bar{x}}/l_x^2+\bar{u}^{(3)}_{\alpha,\bar{y}\bar{y}}/l_y^2)+(\lambda+G)(\bar{u}^{(3)}_{\bar{x},\bar{x}\bar{\alpha}}/l_x+\bar{u}^{(3)}_{\bar{y},\bar{y}\bar{\alpha}}/l_y)/l_\alpha-(3\lambda+2G)\hat{\alpha}T_0\bar{T}^{(3)}_{,\bar{\alpha}}/(bl_\alpha)\right]-15G(b\bar{u}^{(0)}_{\bar{z},\bar{\alpha}}/l_\alpha+\bar{u}^{(1)}_{\alpha}+\bar{u}^{(3)}_{\alpha})=(5\bar{u}^{(1)}_{\alpha,\bar{t}\bar{t}}+3\bar{u}^{(3)}_{\alpha,\bar{t}\bar{t}})\kappa^2/(\rho b^2C_T^2),\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots, \qquad \cdots(9)$$

高次理論による解析精度の特徴や傾向などを調べるためには，ベキ級数展開した場合だけでなくＦｏｕｒｉｅｒ級数展開やその他の級数に展開した場合についても検討する必要がある．さらに近似度についても３ｒｄ－Ｏｒｄｅｒのみならずなお高次の５ｔｈ－Ｏｒｄｅｒにおける解析も必要であるが，これらは今後の研究に回しここでは立ち入らない．平板の面外（曲げ）挙動の動的理論の一つに，せん断変形と回転慣性の影響を考慮したいわゆるＭｉｎｄｌｉｎ型理論がある．高次理論の立場からみるとこのＭｉｎｄｌｉｎ型理論は近似度の低い一種の高次理論とみなすことができる．高次理論解の精度や特徴を調べる第一段階として高次理論解とＭｉｎｄｌｉｎ型理論解との比較を試みる．このためにＭｉｎｄｌｉｎ型理論の無次元化支配式と無次元化境界条件式を求めたが，ここではこれらの式は全部省略する．

４．数値計算例

４．１はりの場合　Al材の単純支持ばりの無加熱，無載荷状態における連成自由振動の固有円振動数を求めた．自重の影響を無視し，支間長２５Cm，高さ０．２２Cm，幅（奥行き）０．０５Cmとして，振動モード形を$e^{i\omega t}$で表しωを求めた．Ｒｅ（ω）が固有円振動数，Im(ω)が減衰を表すので，固有振動数方程式から求めたωのうち減衰解を与えるωだけをＴａｂｌｅ－１に示す．熱の影響を無視する場合にはＩｍ（ω）部分が全て０になって，ωは実数になり振動は減衰しなくなる．

＊１，＊２の値は$\tau=0$の場合には現れない．＊２は詳しく求めると三つの相異なる近接値である．Fourier 級数展開の場合は計算中であり，$\tau_0\neq 0$の場合には右表の値以外のωがあるがこれは現在計算中．

Table　1

理論の種別 ＼ ω	Ｒｅ（ω）	Ｉｍ（ω）	
Mindlin型理論（$\tau_0\neq 0$）	$\pm 0.57334\times 10^{3}$	0.32519×10^{-3}	
	$\pm 0.47922\times 10^{7}$	0.73123×10^{-7}	
	0	0.15264×10^{-1}	
	0	0.82686×10^{11}	＊１
高次理論（べき級数展開）（$\tau_0\neq 0$）	$\pm 0.45270\times 10^{-3}$	0.15548×10^{-1}	
	$\pm 0.43471\times 10^{7}$	0.45473×10^{-3}	
	$\pm 0.22939\times 10^{8}$	0.54306×10^{-3}	
	0	0.82686×10^{11}	＊２
高次理論(Fourier級数展開)（$\tau_0=0$）	$\pm 0.5158\times 10^{5}$	0.5127×10^{2}	
	0	0.1830×10^{3}	
	0	0.7570×10^{5}	
	0	0.2246×10^{11}	

４．２平板の場合　省略

５．結言　はり及び平板の場合のモード図や振動周期その他については学会当日発表する．

参考文献

①平島健一・丸上晴朗，非定常熱弾性特性を考慮した平板の一般化高次理論の誘導と二，三の考察，呉工業高等専門学校研究報告Vol.20,No.2(1985),PP.111～123.

②丸上晴朗・平島健一，板厚方向にフーリエ級数展開を用いた熱弾性平板の高次理論，呉工業高等専門学校研究報告Vol.21,No.1(1985),PP.81 ～91.

③丸上晴朗・平島健一，非定常熱弾性特性を考慮した平板の高次理論と連成熱振動解析，土木学会第４１回年次学術講演会概要集第１部Ｉ－６．