I-3　３次元的に周期分布した球状欠陥を有する弾性体の波動分散特性

東海大学海洋学部　正員　北原道弘

1．はじめに　３次元的に規則正しく分布した欠陥を有する弾性体内の波動伝播は，周期的構造を有する物質内の波動伝播問題に属する。周期性を有する物質内の波動が分散性を伴うのは周知の通りである。本報告では，欠陥を球形と仮定し，３次元的に周期分布した欠陥を有する弾性体内の波動分散特性を明らかにすることを試みる。解析上の要点は次の２点にある：

1）まず，欠陥が平面アレー状態にあるものとして，この問題に対する波の反射・透過係数を決定する。
2）現実の３次元的欠陥分布は，この平面アレーの積み重ねと考え，周期性を考慮した連続条件により平面アレー構造を立体的に結合し，分散関係式を導く。

2．球状欠陥問題の設定　Fig.1に３次元的に周期分布した球状欠陥を有する弾性体の一断面を示す。欠陥の中心は $x_1=ma$，$x_2=nb$，$x_3=lh$（m，n，l＝0，±1，±2・・・）にある。さて，弾性体内において変位場は次式を満足する。

$$\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho\omega^2u_i=0 \tag{1}$$

球状欠陥の表面では応力Free とする。

$$t_i=\lambda u_{j,j}n_i+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j \quad \text{on } S^{mnl} \tag{2}$$

ここで，球表面　S^{mnl}　は次式で与えられる。

$$(x_1-ma)^2+(x_2-nb)^2+(x_3-lh)^2=d^2 \quad -\infty<m,n,l<\infty \tag{3}$$

3．分散関係式　上記３方向周期性を有する弾性体は，角振動数 ω が十分に小さいとき，たとえば　$x_3=lh$　（l＝0，±1，±2・・・）を反射・透過面（x_1x_2　面）とする１方向（x_3 軸）周期構造を持つと考えることができる（もちろん，x_1x_2　面内にも周期性は存在している）。以下，本報告では最も簡単な x_3 軸方向にのみ伝播する平面P波の場合にのみ問題を限定する。この場合，x_3　軸方向に周期性を有する物質内を伝播する波として，次のようなブロッホ（Bloch）波を仮定することができる。[1)]

$$u_3(x_3)=U_3(x_3)\exp(iqx_3) \tag{4}$$

ここに，q はこの x_3 軸方向の波動を特徴づけるブロッホの波数であり，　$U_3(x_3)$　は次の周期性をを持つ。

$$U_3(x_3+h)=U_3(x_3) \tag{5}$$

式（4），（5）より，変位と応力の x_3 軸方向周期性に関する次の条件を得る。

$$u_3(h/2)=u_3(-h/2)\exp(iqh) \tag{6}$$

$$\tau_{33}(h/2)=\tau_{33}(-h/2)\exp(iqh) \tag{7}$$

いま，x_1x_2　面内の球状欠陥を含む　C_l　層を次のように定義する。

$$C_l=\{\xi : |\xi| \le h/2\} \tag{8}$$

ここに，ξ軸の原点は　$x_3=lh$　である。この各 C_l 層で次のような波動を考える。

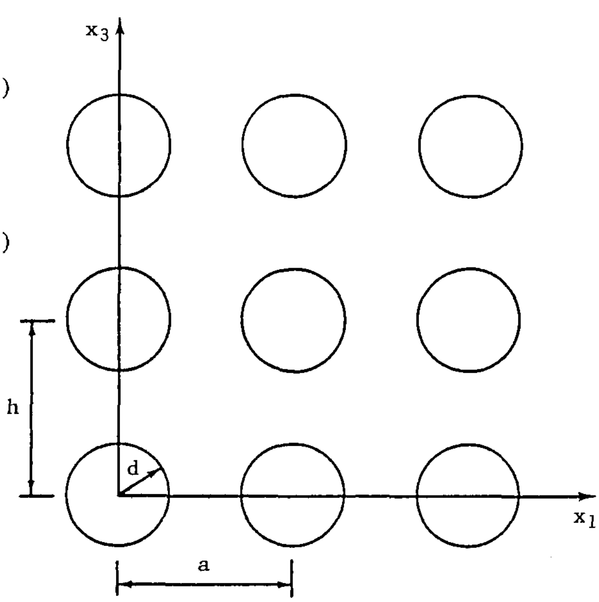

Fig.1 Cross section of three dimensional array of spherical cavities.

$$u_3(\xi) = TA\exp(ik_L\xi) + B\exp(-ik_L\xi) + RB\exp(ik_L\xi), \quad 0\le\xi\le h/2 \tag{9}$$

$$u_3(\xi) = A\exp(ik_L\xi) + RA\exp(-ik_L\xi) + TB\exp(-ik_L\xi), \quad -h/2\le\xi\le 0 \tag{10}$$

ここに，A（B）はξ軸の正（負）方向に伝播する波の振幅であり，T は C_l 層内の球状欠陥による波の透過係数，R は反射係数である。また，k_L は縦波の波数である。式（9），（１０）を周期性条件（6），（7）に代入することにより，振幅A，Bに関する次の同次方程式を得る。

$$[\ T - (e^{-ik_Lh} + R)e^{iqh}\ ]A + [\ e^{-ik_Lh} + R - Te^{iqh}\ ]B = 0 \tag{11}$$

$$[\ T - (e^{-ik_Lh} - R)e^{iqh}\ ]A - [\ e^{-ik_Lh} - R - Te^{iqh}\ ]B = 0 \tag{12}$$

上式の行列式を零とおくことにより，波動（9），（１ 0）が存在するための条件として次式を得る。

$$\cos(qh) = \{\ (T^2 - R^2 - 1)e^{ik_Lh} + 2\cos(k_Lh)\ \}/2T \tag{13}$$

これが，与えられた波数　k_Lh（与えられた振動数に等価）とブロッホの波数　qh　を結びつける分散関係式となる。ここで，透過係数　T　と反射係数　R　は複素数であり，TとRは　k_Lh　の関数であることに注意する（TとRの決め方については文献２参照）。波数　k_Lh　を与えて式（１３）を解けばブロッホの波数　qh　を得るが，式（１３）の右辺からわかるように，この波数　qh　は一般に複素数となる。

４．結果

Ｆｉｇ．２に分散関係の一例を示す。図中 k_Lh が与えた波数であり，q_1h はブロッホ波数　qh　の実根，q_2h　は　qh　の純虚根根である。$k_Lh=\pi$　付近に波が伝播しない　Ｓｔｏｐｐｉｎｇ　ｂａｎｄ　が存在することがわかる。

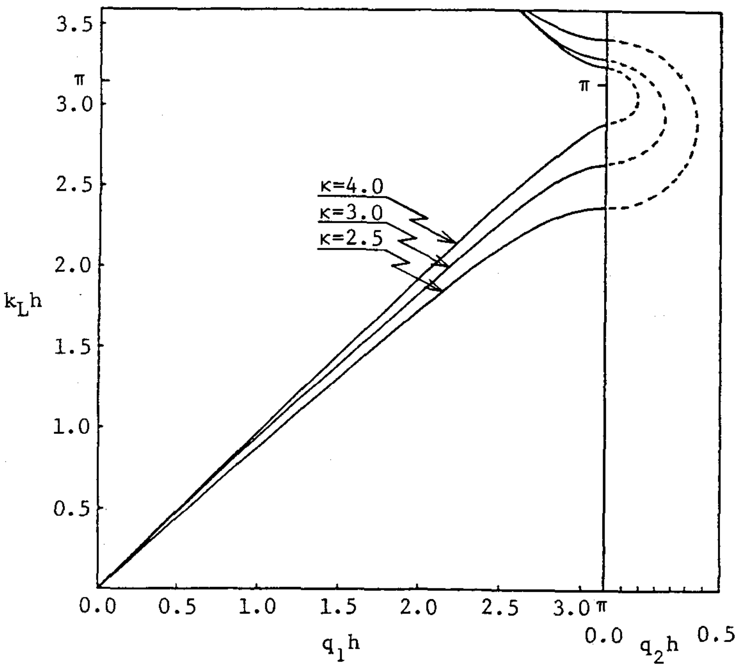

Fig.2 Dispersion curves : k_Lh vs. qh
($\kappa = a/d = b/d = h/d$).

参考文献

１）アシュクロフト・マーミン；固体物理の基礎（上・Ｉ），吉岡書店，１９７６.

２）Ａｃｈｅｎｂａｃｈ，Ｊ．Ｄ．ａｎｄ　Ｋｉｔａｈａｒａ，Ｍ．；Ｊ．Ａｃｏｕｓｔ．Ｓｏｃ．Am.，Ｖｏｌ．８０，ｐｐ．１２０９−１２１４，１９８６．