

I-2

逐次近似手法に基づく各種の高次平板理論の相互関係と精度

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
山梨大学工学部 正員 平島健一

1 緒言 本報告では、3次元弾性論の基礎式を逐次近似的に満足させていく定式化手法を用いて、静的な平板の高次理論を構築し、理論特性を明らかにする。また本手法を特殊化することにより従来提案されている断面積分型の逐次近似平板理論を一般化した理論が得られることを示すとともに、数値計算例を提示して各種理論の精度の検証を行う。なお解析対象は等方性等厚板の線形問題に限定する。

2 理論式の誘導

Fig. 1 に示すように横荷重を受けた平板の挙動を (1) 曲げ挙動と (2) 伸縮挙動に分解し、各状態ごとに力学量の板厚方向分布の対称性・逆対称性を考慮し、上下表面の応力境界条件 (S. B. C.) を満足させながら、逐次、3次元弾性論の基礎式を用いて高次の理論式を誘導していく。この定式化手順は曲げ、伸縮ともに Fig. 2 の流れ図 (破線部を除いたもの) で与えられ、それらの初期値 ($n=0$) を、曲げ挙動の場合は $e_{zz}^{(0)} = 0$, $\tau_{\alpha z}^{(0)} = 0$, $\tau_{zz}^{(0)} = 0$ 、伸縮挙動の場合は $e_{zz}^{(0)} = 0$, $\tau_{\alpha z}^{(0)} = 0$, $\tau_{zz}^{(0)} = -p/2$ と設定し、以降、前の段階で求めた値を基にして逐次高次の理論式を定式化していく、なお曲げ挙動の1次理論はKirchhoff-Loveの仮定に基づく古典平板理論に一致し、伸縮挙動の1次理論は広義の平面応力問題の理論式に一致する。これらの低次の支配式 (Gov. Eq.) を示せば次式のようなのである。

(曲げ挙動 第 n 次近似理論)

$$\frac{2EC^3}{3(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 U_z^{(n)} = \sum_{k=1}^n p^{(k)}$$

$$p^{(1)} = p$$

$$p^{(2)} = -\frac{(8-3\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^2}{10}\right) \nabla^2 p$$

$$p^{(3)} = -\frac{(227-384\nu+157\nu^2)}{(1-\nu)^2} \left(\frac{C^2}{4200}\right) \nabla^2 \nabla^2 p$$

(伸縮挙動 第 m 次近似理論) $\alpha, \beta = x \text{ or } y$

$$\frac{EC}{2(1-\nu)^2} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 U_{\alpha}^{(m)} + (1+\nu) U_{\beta, \beta}^{(m)} \right\} = \sum_{k=1}^m p^{(k)}$$

$$p^{(1)} = \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{C}{2}\right) p_{, \alpha}$$

$$p^{(2)} = -\left(\frac{C}{12}\right) \nabla^2 p_{, \alpha}$$

$$p^{(3)} = -\frac{(1/4+\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{C^5}{720}\right) \nabla^2 \nabla^2 p_{, \alpha}$$

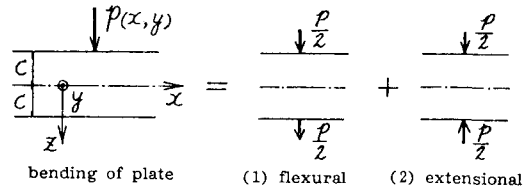


Fig. 1 Decomposition of bending of plate.

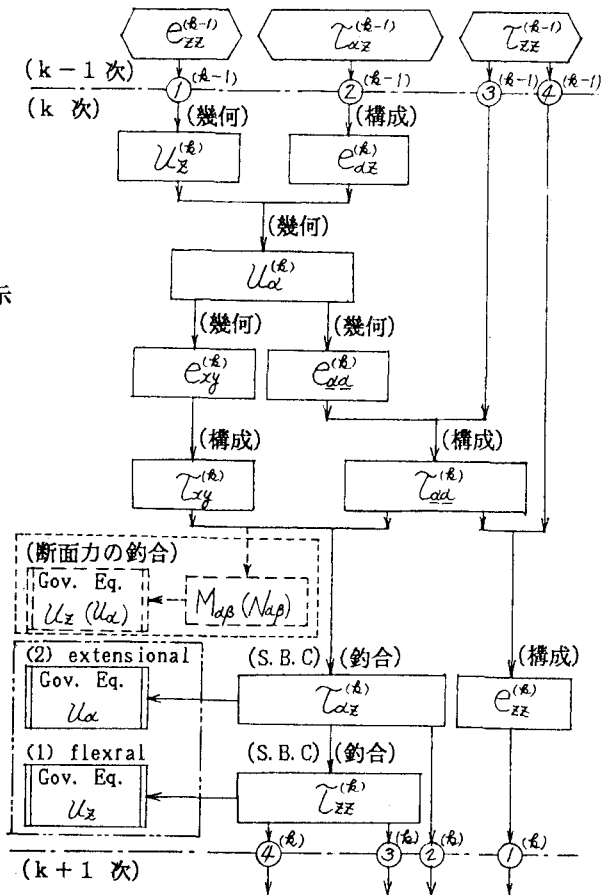


Fig. 2 Flow chart of deduction of present theory.

3 理論特性および従来の各種理論との相互関係

本理論は、Goldenveizer¹⁾およびKolos²⁾の漸近展開法に基づく平板理論と同等の理論式を、逐次近似手法によって定式化したものとなっており、この関係は、Donnell³⁾の理論が応力法型の漸近展開法に基づく平板理論と同等の理論を逐次近似手法で定式化したものであるのと相似な関係にある。他方、断面力のつり合い式を支配式とする各種の断面積分型の逐次近似理論が提案されているが、それらは本理論の流れ図 Fig. 2 において、支配式の誘導を破線部の断面力のつり合いによるものとして（鎖線部を無視し）、さらに次のように特殊化することによって得られる。

理論	流れ図の特殊化	従来の理論
一般化 Panc 理論 (GPT)	曲げ (n 次) ① ^(k) ← ① ⁽⁰⁾ : $\epsilon_{xz}^{(k)} = 0$ ③ ^(k) ← ③ ⁽⁰⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = 0$ 伸縮 : 無視	n = 2 が Panc ⁴⁾ の Component理論
一般化 Rehfield理論 (GRT)	曲げ (n 次) ④ ^(k) ← ④ ⁽⁰⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = 0$ 伸縮 : 無視	n = 2 が Rehfield-Rao ⁵⁾ Valisetty理論
一般化 Ambartsumyan 理論 (GAT)	曲げ (n 次) ① ⁽¹⁾ ← ① ⁽⁰⁾ : $\epsilon_{xz}^{(2)} = 0$ ② ^(k) ← ② ⁽¹⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(1)}$ ③ ^(k) ← ③ ⁽¹⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(1)}$ ④ ^(k) ← ④ ⁽¹⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(1)}$ 伸縮 (m = n-1 次) ② ^(k) ← ② ⁽⁰⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = 0$ ③ ^(k) ← ③ ⁽⁰⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(0)}$ ④ ^(k) ← ④ ⁽⁰⁾ : $\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(0)}$	n = 2 (m=1) が Ambartsumyan ⁶⁾ 理論 n ≥ 3 (m ≥ 2) が 平島-村松 ⁷⁾ 理論

4 数値計算例

周辺単純支持正方形板 ($a=b$, $c/a=0.7$, $\nu=0.25$) に、鉛直下向き荷重 $p=p_0 \sin(\frac{\pi x}{2a}) \sin(\frac{\pi y}{2b})$ を上下表面に $p/2$ ずつ分割载荷した系での面外変位 U_z と面外せん断応力 τ_{xz} の板厚方向分布を Fig. 3 と Fig. 4 にそれぞれ示す。図中には本理論と上記表中の3種の特特殊化理論による結果の収束値を示してある。また Fig. 5 は p を同平板の上表面に一括载荷した系での曲げ応力 τ_{xx} について伸縮挙動を考慮した本理論と一般化 Ambartsumyan 理論とを比較したものである。

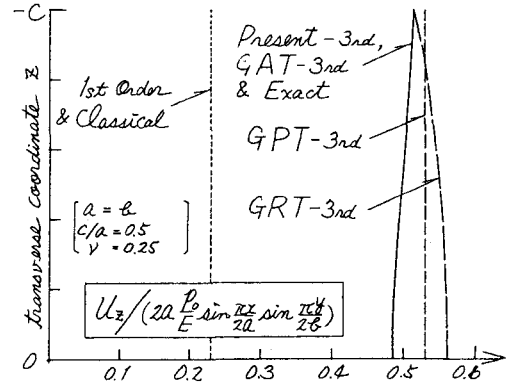


Fig. 3 Transverse displacement U_z profiles.

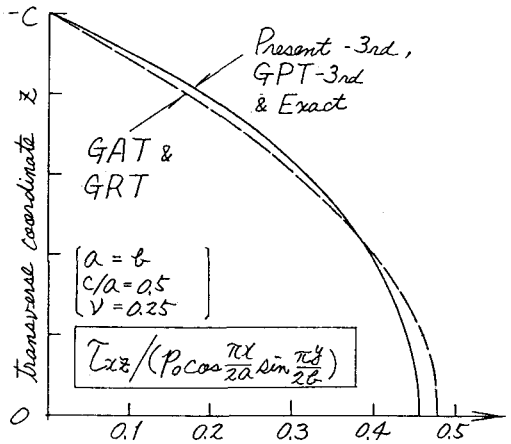


Fig. 4 Transverse shear stress τ_{xz} profiles.

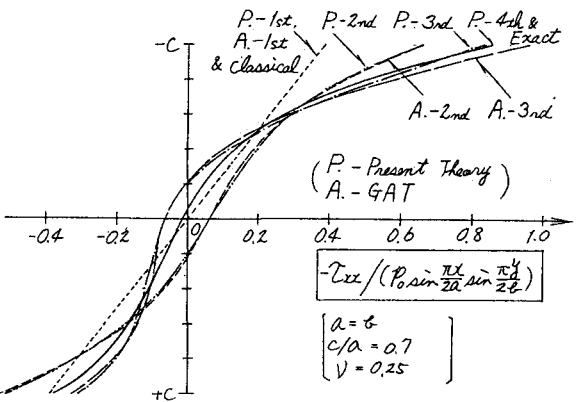


Fig. 5 Bending stress τ_{xx} profiles.

参考文献 1) Goldenveizer, A. L. : PMM, Vol. 26, No. 4, pp. 668-686, 1962. 2) Kolos, A. V. : PMM, Vol. 29, No. 4, pp. 771-781, 1965. 3) Donnell, L. H. : Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 369-373, 1954. 4) Panc, V. : Theories of Elastic Plates, Noordhoff Int., pp. 13-33, 1974. 5) Rehfield, L. W. & R. Rao Valisetty : AIAA J., Vol. 22, No. 1, pp. 90-95, 1984. 6) Hirashima, K. & M. Muramatsu : Proc. JSCE, No. 340, pp. 33-46, 1980. 7) Baluch, M. H. & G. Z. Boyiadjis : 15th Int. Congr. Theoretical Appl. Mech., Toronto, 1980.