I-1　二階のテンソル場の可視化に対する一考察

法政大学工学部　正会員　宮下清栄
法政大学計算センター　正会員　武田　洋

１．まえがき

有限要素法などの数値解析法を用いて，応用力学の問題を解析する場合，その解析結果を迅速かつ的確に評価するために，コンピュータグラフィックスを応用した図式表示が非常に有効であり，従来より広く用いられている．一般に温度場などのスカラー変数に対しては，等高線表示やカラーペイント表示等が用いられており，速度場などのベクトル変数に対しては，大きさとその方向を用いた矢印によるベクトル表示やそのベクトル場に対する流れ関数の等高線表示などが用いられている．

応力場などの二階のテンソル変数は，一般に応用力学の問題の解析における最も重要な解析変数の一つであり，具体的問題の解析結果を評価するために常に用いられている．現在，代表的な二階のテンソル変数である応力やひずみなどのコンピュータグラフィックスを応用した図式表示としては，相当応力等の不変量を用いたスカラー的表示や主応力などの主成分とその方向を用いたベクトル的表示が一般に用いられている．一方，弾性学の分野では『力の流れ』を的確に表現するための方法として，主応力線図を用いることが19世紀以来行われており（例えば参考文献[1]），さらに光弾性実験の分野では実験結果から等傾線を描き，それを用いて主応力線図を作成する方法が確立している（例えば参考文献[2]）．

ここでは，まず過去に広く用いられていた主応力線図の概念を，現在偏微分方程式の数値解法として最も広く用いられている有限要素法の範疇で取り扱うためのアルゴリズムについて論じる．続いて従来の主応力線図では直接的には応力場の方向性だけしか表現することができなかったが，近年のパーソナルコンピュータ等の発達によって高精度かつ安価なカラー表示が容易に行える環境を考慮に入れて，その強さも同時に表現するように拡張する．終わりに代表的な弾性学の問題を例にとり，ここで提案する方法の有効性を示すとともに，このアルゴリズムを最大せん断成分に適用することにより，光弾性試験から得られる等色線図を拡張した図式表現ができることを示す．

２．二階のテンソル場の主軌線とせん断軌線

二階のテンソル場の主値または最大せん断成分の方向に対するベクトル線は主軌線またはせん断軌線と呼ばれ，その取り扱いはベクトル場に対してベクトル線を求める場合と同一であり[3]，ここでは具体的なアルゴリズムとしてはベクトル線の作成方法について考え，さらに三次元領域に対しては任意の切断面を考えるものとする．なおここでの表示は総和規約に則るものとし，その範囲は 2 とする．

ベクトル場 c_i に対するベクトル線 x_j のパラメータ方程式は次式で定義される．

$$\varepsilon_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial s}c_j = 0 \tag{1}$$

ここで s はベクトル曲線のパラメータ，ε_{ij}は交代記号である．次に次式のベクトルポテンシャルψを導入する．

$$c_i = \varepsilon_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \tag{2}$$

式(2) を式(1) に代入することにより次式が得られる.

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial s}=\delta_{jk}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial s}=d\psi=0 \qquad (3)$$

ここで δ_{jk} はクロネッカーのデルタ記号であり，上式より明らかにベクトル線を作画するためのアルゴリズムはベクトルポテンシャル（以下流線に対する流れ関数と同様にベクトル線関数と呼ぶことにする）の等高線の作画に帰着する.

3．有限要素法によるベクトル線関数の計算

有限要素法では離散モデルに対して解析変数が求められており，通常その位置は節点または要素内部の積分点である．ここではアルゴリズム構築の容易性から，解析変数は節点において評価されているものとする．任意の節点 I から，有限要素モデルを通じてその節点に連結する節点 J までのベクトル線関数の変化 $\Delta\psi$ は次式によって求められる.

$$\Delta\psi=\int\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s}ds=\int c_i\ n_i\ ds \qquad (4)$$

ここで n_i は節点 I と J を結ぶ要素境界の外向き単位法線ベクトルである．ここで次の有限要素補間を導入する.

$$\{c\}=[N]\{c^e\}\ \ ;\ \ \{n\}=[Bn]\{x^e\} \qquad (5)$$

ここで $\{c^e\}$ と $\{x^e\}$ はそれぞれ着目する要素境界に位置する節点における解析変数および座標の値である．式(5) を式(4) に代入することにより次式がえられる.

$$\Delta\psi=\int\{c\}^t\{n\}\ ds=\{c^e\}^t\int[N]^t[B_n]\ ds\ \{x^e\} \qquad (\&)$$

上式をすべての有限要素メッシュについて評価することにより，有限要素モデルのすべての節点におけるベクトル線関数の変化を定めることができる.

ベクトル線関数を等高線表示するアルゴリズムは通常有限要素解析で用いられているものを使うことができるが，主値に関しては最大成分と最小成分を同時に表示するものとし，作画する線のタイプを区別するものとする．カラーディスプレイ装置に対しては等高線作画時にその位置における主値またはせん断値を，式(5) と同様な補間関数を用いて求め，その値に応じて作画する線の色を定めることにする.

4．あとがき

ここでは応力場などの二階のテンソル場を可視化するための新しいアルゴリズムを提案した．今後の研究としては完全な三次元領域に対する同様なアルゴリズムの構築が残されている.

【参考文献】

[1] A.E.Love : The Mathematical Theory of Elasticity : Dover Publications,Inc., 1944.
[2] 鵜戸口英善 : 平面光弾性実験法 : 応力測定法　第10章，朝倉書店，1955.
[3] J.L.Ericksen : Tensor Fields : Encyclopedia of Physics, VolⅢ/1, Springer-Verlag, 1960.