

寒河江工業高等学校
岡山大学 工学部正員 町田 憲一
正員 森 忠次

1. はじめに

現在三辺網に限らず測地網の調整は図形調整(条件方程式)法より座標調整(観測方程式)法によるのが有利とされている¹⁾。その大きな理由の1つは、網が複雑になると調整のための必要十分な条件方程式(以下、条件式という)の規則的作成が困難であるという点にある²⁾。筆者は三辺網のこの問題に対して肯定的な解決法を発表した²⁾。図形調整法によれば座標調整法と比べて正規方程式の数が少なくて済み³⁾、従って調整には必ずしも大中小型コンピュータを必要としない事が多い。本論はこの利点を生かして、三辺網の調整にパーソナルコンピュータを使用する組織的体系的な図形調整法を提示するものである。

2. 基本三辺網の辺長の残差に関する条件式

基本三辺網²⁾の一般形をFig. 1に示す。その記号の意味は次の通りである。

XY軸: 平面直角座標軸, $P_1(X_1, Y_1)$: 基本三辺網の始端測点(既知or指定), $P_e(X_e, Y_e)$: 基本三辺網の終端測点(P_1 から求められる測点or既知),
太線: l_i (後述)を用いて P_e の座標を求めるための計算ルート(以下、ルートという), $P_k(X_k, Y_k)$: ルート上の測点,
 $P_k(X_k, Y_k)$: ルート上以外の測点(P_k に交差する三角形(8)の第一辺(後述)上にあるものとする),
(i): 三角形 i , l_{H1} : ルート上の最初の辺の辺長,
 l_{rt} : ルート上の辺の辺長, l_{2i-1} ・ l_{2i} : (i)の α_i (後述)をはさむ右の辺(以下、第一辺という)の辺長および α_i に対す辺(以下、第二辺という)の辺長(l_{2i-1} がルート上の辺の時は $l_{2i-1} = l_{rt}$, P_k のルート上の次の辺は l_{rk} , その時は $l_{2i-1} = l_{rk}$ とする), l_{2i-3} or l_{2i-2} : (i)が接続する辺の辺長(以下、 l_{2i-3} で代表させる), l_{2g-1} : (g)の第一辺の辺長,
 l_j : 以上の総ての辺の代表辺の辺長,
 L : P_1, P_e 間の辺(余剰観測辺²⁾)の辺長,

L : P_1, P_e 間の既知辺(指定辺²⁾)の辺長,

α_i : P_k に交差する(i)の非測定角, α'_i : (i)の第一辺と第二辺のなす非測定角, β_{H1} : l_{H1} の方向角(既知or指定値, 誤差: 0とする), β_{2i-1} : l_{2i-1} の方向角($l_{2i-1} = l_{rt} \rightarrow \beta_{2i-1} = \beta_{rt}$, $l_{2i-1} = l_{rk} \rightarrow \beta_{2i-1} = \beta_{rk}$ とする),

β_{2g-1} : l_{2g-1} の方向角

[注] P_1 からの P_e の座標算出には常に、ルート上の進行方向左側の α_i, α'_i を用いるものとする。

基本三辺網の辺長に関する条件式は次式で表わせる。

$$\hat{l}_s = \hat{l} \quad \text{or} \quad \hat{l}_s = L \quad (1)$$

但し $\hat{l}_s$: l_i を用いて得られる P_1, P_e 間の辺長 l_s の最確値

$\hat{l}$: l の最確値

式(1)を辺長の残差に関する条件式に変換すれば次式で表わせる(誘導省略)。

$$\sum_{k=2}^m \{ f_{rk}(v_i, l_i) (Y_s \sum_{t=k}^m x_{rt} - X_s \sum_{t=k}^m y_{rt}) \} + \sum_{t=1}^m v_{rt} (X_s \cos \beta_{rt} + Y_s \sin \beta_{rt}) - v + \varepsilon = 0 \quad (2)$$

但し v_i : l_i の残差, v : l の残差, $f_{rk}(v_i, l_i)$: P_k における v_i, l_i のある関数(次項3参照),

$$Y_s = (Y_e - Y_1)/l_s, X_s = (X_e - X_1)/l_s, l_s = \{(X_e - X_1)^2 + (Y_e - Y_1)^2\}^{1/2}, \varepsilon = l_s - l \text{ or } l_s - L, X_e = X_1 + \sum_{t=1}^m x_{rt},$$

$$Y_e = Y_1 + \sum_{t=1}^m y_{rt}, x_{rt} = l_{rt} \cos \beta_{rt}, y_{rt} = l_{rt} \sin \beta_{rt},$$

$$l_j: \text{既知補足辺}^{2)} \text{の辺長} \rightarrow v_j = 0, \quad L \rightarrow v = 0$$

式(2)を簡単にして次式で表わせる。

$$\sum_{i=1}^{2n} (D_i v_i) - v + \varepsilon = 0 \quad (3)$$

式(3)の D_i を式(2)からパソコンを使用して組織的に迅速に算出することができる。

3. $f_{rk}(v_i, l_i)$ について

Fig. 1の P_k に交差する総ての三角形の総ての辺の辺長とその残差のある関数を $f_{rk}(v_i, l_i)$ で表わす。

Fig. 1の三角形(i)1個のみの P_k における $f_{rk}(v_i, l_i)$ は式(4)でその係数 A_i, B_i, C_i は式(5)で表わせる。

またこの時の $P_{r(k+1)}$ における $f_{r(k+1)}(v_i, l_i)$ は、式(4)、(5)の係数と α_i に'を付け、 v_i と l_i の添字を次のように替えた式になる。

$$2i-1 \rightarrow 2i, 2i \rightarrow 2i-3, 2i-3 \rightarrow 2i-1$$

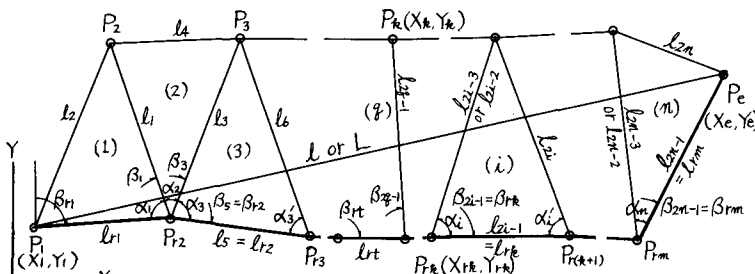


Fig. 1 基本三辺網の一般形

$$f_{rk}(l_i, l_j) = A_i l_{2i-1} + B_i l_{2i} + C_i l_{2i-3} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -(l_{2i-1}^2 - l_{2i-3}^2 + l_{2i}^2) / (2 l_{2i-1} l_{2i-3} \sin \alpha_i) \\ B_i &= l_{2i} / (l_{2i-1} l_{2i-3} \sin \alpha_i) \\ C_i &= -(l_{2i-1}^2 + l_{2i-3}^2 - l_{2i}^2) / (2 l_{2i-1} l_{2i-3} \sin \alpha_i) \\ \alpha_i &= \cos^{-1} \{ (l_{2i-1}^2 + l_{2i-3}^2 - l_{2i}^2) / (2 l_{2i-1} l_{2i-3}) \} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

例えば $f_{r2}(l_i, l_j)$ は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} f_{r2}(l_i, l_j) &= (A_1 l_1 + B_1 l_2 + C_1 l_3) + (A_2 l_3 + B_2 l_4 \\ &\quad + C_2 l_5) + (A_3 l_5 + B_3 l_6 + C_3 l_7) \\ &= C_1 l_1 + (A_1 + C_2) l_1 + B_1 l_2 + (A_2 + C_3) l_3 \\ &\quad + B_2 l_4 + A_3 l_5 + B_3 l_6 \end{aligned} \quad (6)$$

但し式(6)の係数は式(5)から得られる値である。

4. 三辺網の調整計算

三辺網全体として基本三辺網の数だけの式(3)に相当する条件式が生じる²⁾。これを条件付き独立直接相則の調整(最小2乗法適用)として取扱いパソコンを使用して組織的に計算する。この一連の計算式を行列表示すれば次のようである⁴⁾。

l : 観測値, U : 残差, $\hat{l}$: 最確値, Q : 観測値の重み係数行列, $DU + E = 0$: 条件式,

Q_{ii} : 最確値の重み係数行列 とすると

$$U = -\psi N^{-1} E, \hat{l} = l + U, Q_{ii} = Q - \psi N^{-1} \psi^T$$

$$\text{但し } \psi = Q D^T, N = D Q D^T$$

5. 測点座標とその重み係数行列の計算

Fig. 1において l or L を除く網を調整済みの任意の単列三辺網²⁾とし, $l_i, \alpha_i, \hat{\alpha}_i, \beta_{2i-1}, \beta_{2i-1}, X_{rk}, Y_{rk}$ (以下, r と k を一諸に示す) をこれらの最確値, $\hat{l}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_{2i-1}, \hat{\beta}_{2i-1}, \hat{X}_{rk}, \hat{Y}_{rk}$ で置き換える。これの測点座標の最確値(以下測点座標という)とその重み係数の計算を次の順序でパソコンを使用して組織的に行う。

P_{rk} の測点座標は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} \hat{X}_{rk} &= X_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{l}_{ri} \cos \hat{\beta}_{ri}) + \hat{l}_{2k-1} \cos \hat{\beta}_{2k-1} \\ \hat{Y}_{rk} &= Y_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{l}_{ri} \sin \hat{\beta}_{ri}) + \hat{l}_{2k-1} \sin \hat{\beta}_{2k-1} \end{aligned}$$

但し, 第3項は $\hat{X}_k, \hat{Y}_k$ のみの項である。

$\hat{X}_{rk}, \hat{Y}_{rk}$ の重み係数行列 Q_{xx}, Q_{yy} は次の順序で計算できる⁵⁾。但し, 以下の $\hat{l}_i$ は無次元化した量を用いる。

1) $\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i$ と $\hat{l}_{ri}, \hat{l}_{2i-1}$ との重み係数行列 $Q_{\alpha\alpha}$ の計算

使用変数: $\hat{l}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{l}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{l}_3, \dots, \hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{l}_{2i-1}$

その行列表示: $\alpha = F_1 \hat{l}$ (F_1 : 省略)

但し, $\hat{\alpha}_i = \hat{A}_i \delta \hat{l}_{2i-1} + \hat{B}_i \delta \hat{l}_{2i} + \hat{C}_i \delta \hat{l}_{2i-3} + \text{定数}$

$$\hat{\alpha}_i = \hat{A}_i \delta \hat{l}_1 + \hat{B}_i \delta \hat{l}_{2i-3} + \hat{C}_i \delta \hat{l}_{2i-1} + \text{定数}$$

$\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i$: 式(5)の l_i を $\hat{l}_i$ で, $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i$ は $\hat{l}_i$ の添字も前頁右下の様に各々置き換えた値, $\delta \hat{l}_i$: $\hat{l}_i$ の誤差

$$Q_{\alpha\alpha} = F_1 Q_{ll} F_1^T$$

2) $\hat{\beta}_{2i-1}$ と $\hat{l}_{ri}, \hat{l}_{2i-1}$ との重み係数行列 $Q_{\beta\beta}$ の計算

使用変数: $\hat{l}_1, \hat{\beta}_1, \hat{l}_1, \hat{\beta}_3, \hat{l}_3, \dots, \hat{\beta}_{2i-1}, \hat{l}_{2i-1}$

その行列表示: $\beta = F_2 \alpha$ (F_2 : 省略)

但し, $\hat{\beta}_{2i-1} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_3 + \dots + \hat{\alpha}_i + \text{定数}$

$$Q_{\beta\beta} = F_2 Q_{\alpha\alpha} F_2^T$$

3) $\hat{X}_{rk}, \hat{Y}_{rk}$ の重み係数行列 Q_{xx}, Q_{yy} の計算

$\hat{X}_{rk}, \hat{Y}_{rk}$ の誤差 $\delta \hat{X}_{rk}, \delta \hat{Y}_{rk}$ は次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \delta \hat{X}_{rk} &= \sum_{t=1}^{k-1} (\cos \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{l}_{rt} - \sin \hat{\beta}_{rt} \hat{l}_{rt} \delta \hat{\beta}_{rt}) \\ &\quad + (\cos \hat{\beta}_{2k-1} \delta \hat{l}_{2k-1} - \sin \hat{\beta}_{2k-1} \hat{l}_{2k-1} \delta \hat{\beta}_{2k-1}) + \text{定数} \\ \delta \hat{Y}_{rk} &= \sum_{t=1}^{k-1} (\sin \hat{\beta}_{rt} \delta \hat{l}_{rt} + \cos \hat{\beta}_{rt} \hat{l}_{rt} \delta \hat{\beta}_{rt}) \\ &\quad + (\sin \hat{\beta}_{2k-1} \delta \hat{l}_{2k-1} + \cos \hat{\beta}_{2k-1} \hat{l}_{2k-1} \delta \hat{\beta}_{2k-1}) + \text{定数} \end{aligned}$$

但し, 上2式の第2項は $\delta \hat{X}_k, \delta \hat{Y}_k$ のみの項である。

$\delta \hat{l}_{rt}, \delta \hat{l}_{2k-1}, \delta \hat{\beta}_{rt}, \delta \hat{\beta}_{2k-1}$: $\hat{l}_{rt}, \hat{l}_{2k-1}, \hat{\beta}_{rt}, \hat{\beta}_{2k-1}$ の誤差

上2式の行列表示: $\hat{X} = F_3 \beta, \hat{Y} = F_4 \beta$ (F_3, F_4 : 省略)

$$Q_{xx} = F_3 Q_{\beta\beta} F_3^T, Q_{yy} = F_4 Q_{\beta\beta} F_4^T$$

6. 本調整法の順序

- 1) 三辺網からの基本三辺網の抽出²⁾
- 2) 基本三辺網のデータ入力
- 3) 残差, 最確値, その重み係数等の出力
- 4) 単列三辺網のデータ入力
- 5) 測点座標とその重み係数等の出力

7. おわりに

以上の計算方法に基づき, パソコンを使用した三辺網の図形調整が可能である。機種 PC9801 を使用して現在までプログラミングがほぼ完了している。

講演時にはプログラム, 入力方法, 調整計算例, 出力結果等を詳しく紹介したい。本調整計算の煩雑なプログラミングには寒河江工業高校, 山川茂夫講師の全面的な援助を戴いた。記して感謝申し上げる。

8. 参考文献

- 1) 日本測量協会: 精密基準点測量, 昭49, P.33, PP.97-105
- 2) 町田 森: 三辺網の図形調整における必要十分な条件式の決定法, 第40回年次学術講演会講演概要集, 第4部, P-104
- 3) 澤田良修: 測量計算マニュアル, 山海堂, 昭53, P.23
- 4) 森忠次: 測量学2 応用編, 九巻, 1981, PP.344-348
- 5) 森忠次: 角距離とを測った単純な四角形網の誤差と効率率, 土木学会論文集, 第359号/P-3, 1985, PP.122-125