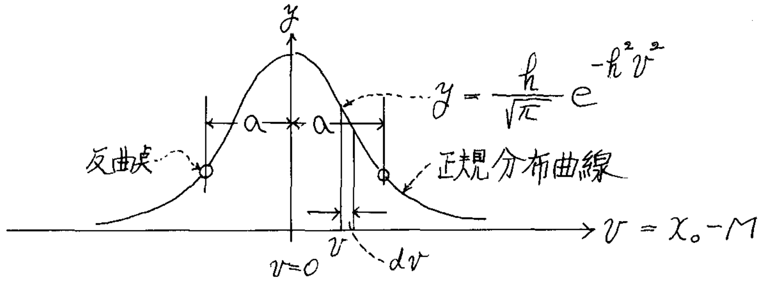
Ⅳ-235　異精度平均の標準偏差解析と誤用解

北海道産業専門学校　正会員　今井芳雄

§1. 前言



測量では正規分布（normal distribution）を扱う．1材観測Mの算術平均 $X_0 = \frac{M_1+M_2+\cdots+M_n}{n}$ ……(1.1) を真値とする．残差 $v = X_0 - M$ …(1.2) の出現する確率 $= y \times dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-h^2v^2}\right)dv$．[$h$=精度]……(1.3)，標準偏差 $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}{n-1}}$ …(1.4)，$\alpha^2 \cdot h^2 = \frac{1}{2}$ …(1.5) によってαとhは結ばれている

§2. 重み（weight）．　観測値 M_i $(i=1,2,\cdots n)$ の個々が精度 h_i $(i=1,2,\cdots n)$ である時従来便利のため任意のhをとり重み $p_i = (h_i^2)/(h^2)$ …(2.1) を定義する．任意のαをとり重み $p_i = (\alpha^2)/\alpha_i^2$ …(2.2) も定義する。　§3. 精度の異った観測値 M_i $(i=1,2,\cdots n)$ の最確値：　観測の真値をZとおけば $(Z-M_i)$ は M_i $(i=1,2,\cdots n)$ の誤差である．i番目の誤差 $(Z-M_i)$ の出現する確率 $P''(Z-M_i) = \frac{h_i}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h_i^2(Z-M_i)^2}\right\} \times d(Z-M_i)$ … (3.1)．n個の誤差 $(Z-M_i)$，$(i=1,2,\cdots n)$ のすべて同時出現する確率 $P(Z-M_i)$

$$= \left\{\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-h_1^2(Z-M_1)^2}\right) \times d(Z-M_i)\right\} \times \left\{\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-h_2^2(Z-M_2)^2}\right) \times d(Z-M_2)\right\} \times \cdots\cdots \times \left\{\frac{h_n}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-h_n^2(Z-M_n)^2}\right) \times d(Z-M_n)\right\} = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} \times \cdots \times \frac{h_n}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h_1^2(Z-M_1)^2 - h_2^2(Z-M_2)^2 - \cdots\cdots - h_n^2(Z-M_n)^2}\right\} \times d(Z-M_1) \times d(Z-M_2) \times \cdots \times d(Z-M_n)$$

d=微分記号…(3.2)　真値Zは(3.2)式確率を最大にするものでeのマイナスpowerを最大にするとき，マイナスpower指数の絶対値を最小するときである ∴ $d\left\{h_1^2(Z-M_1)^2 + h_2^2(Z-M_2)^2 + \cdots + h_n^2(Z-M_n)^2\right\}/dZ = 2 \times \left\{Z(h_1^2+h_2^2+\cdots+h_n^2) - h_1^2M_1 - h_2^2M_2 - \cdots\cdots - h_n^2M_n\right\} = 0$ ……(3.3) とおいて求めるZは最確値である ∴ $Z = (h_1^2M_1 + h_2^2M_2 + \cdots + h_n^2M_n)/(h_1^2+h_2^2+\cdots h_n^2)$ …(3.4)，$X_0 = Z$ とおけばweight付観測の平均値である。任意の精度hで(3.4)式分子分母を割り(2.1)式のweight p を用いると $X_0 = \left\{(h_1^2/h^2)M_1 + (h_2^2/h^2)M_2 + \cdots (h_n^2/h^2)M_n\right\} / \left\{(h_1^2/h^2) + (h_2^2/h^2) + \cdots + (h_n^2/h^2)\right\} = \left\{p_1M_1 + p_2M_2 + \cdots + p_nM_n\right\} / \left\{p_1 + p_2 + \cdots + p_n\right\}$ …(3.6)．(3.6)式において仮りに $\alpha_i'' = \alpha_i \times \beta$，$(i=1,2,\cdots n)$ とおくと $p_i'' = \alpha^2/(\alpha_i'')^2 = \alpha^2/(\alpha_i \times \beta)^2 = (1/\beta^2)(\alpha^2/\alpha_i^2) = (1/\beta^2)p_i$　従って $X_0'' = \left\{p_1''M_1 + p_2''M_2 + \cdots + p_n''M_n\right\} / \left\{p_1'' + p_2' + \cdots + p_n''\right\} = (1/\beta^2)\left\{p_1M_1 + p_2M_2 + \cdots + p_nM_n\right\} \div (1/\beta^2)\left\{p_1 + p_2 + \cdots + p_n\right\} = X_0$ …(3.7) となり X_0 にβの作用は及ばない．1方 X_0 の標準偏差 α_0 にβ倍の作用が及ぶ。(3.6)式を書きなおして $X_0 = \left(p_1 / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right) \times M_1 + \left(p_2 / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right) \times M_2 + \cdots + \left(p_n / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right) \times M_n$ …(3.7) とすると M_i $(i=1,2,\cdots n)$ の誤差は X_0 に伝播する。X_0 の誤差も正規分布する．その標準偏差を α_0 とすると $\alpha_0^2 = \left(p_1 / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 \alpha_1^2 + \left(p_2 / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 \alpha_2^2 + \cdots + \left(p_n / \sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 \alpha_n^2$ …(3.8) $= \left\{\left(\alpha^2/\alpha_1^2\right)^2 \alpha_1^2 + \left(\alpha^2/\alpha_2^2\right)^2 \alpha_2^2 + \cdots + \left(\alpha^2/\alpha_n^2\right)^2 \alpha_n^2\right\} / \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 = \alpha^4\left\{1/\alpha_1^2 + 1/\alpha_2^2 + \cdots + 1/\alpha_n^2\right\} / \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2$ … (3.9) $= 1 / \left\{1/\alpha_1^2 + 1/\alpha_2^2 + \cdots + 1/\alpha_n^2\right\}$ …(3.10) ∴ $\alpha_0 = 1 / \sqrt{1/\alpha_1^2 + 1/\alpha_2^2 + \cdots + 1/\alpha_n^2}$ ……(3.11)，(3.9)式から $\alpha_0^2 = \left\{\alpha^2/\alpha_1^2 + \alpha^2/\alpha_2^2 + \cdots + \alpha^2/\alpha_n^2\right\} / \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 = \alpha^2\left\{\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right\} / \left\{\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right\}^2 = \alpha^2 / \sum_{i=1}^{i=n} p_i$　∴ $\alpha_0 = \pm\alpha / \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} p_i}$ ……(3.12) は(3.11)式と同じものになる

§4. 誤用解　精度の異った観測値 $M_i\ (i=1,2,\cdots n)$ の平均値 X_0 の標準偏差 σ_0 について正しい解析式(3.11)を得たが現行測量書では $v_i=X_0-M_i$, $p_i=\sigma^2/\sigma_i^2\ (i=1,2,\cdots n)$ として $\sigma_0=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)(n-1)}$ ....(4.1) が専ら用いられている。全くの誤用解であると云える，あまつさえ $v_i^2\ (i=1,2,\cdots n)$ という2乗計算は手間のかかるもので誤用解の欠点を更に加えている $\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)(n-1)}=\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{(n-1)}\right\}\times 1/\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}$ ....(4.2) と書きなおせるから (4.1)式の σ_0 が誤用解でなく正しい(3.12)式の σ_0 であるためには $\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{(n-1)}\right\}=\sigma$ ...(4.3) でなければならぬ，果してそうであろうか，$p_i=\sigma^2/\sigma_i^2\ (i=1,2,\cdots n)$ であるから $\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{(n-1)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}v_i^2\right)}\div\sqrt{(n-1)}=\sqrt{\sigma^2\sum_{i=1}^{i=n}(v_i^2\times 1/\sigma_i^2)}\div\sqrt{(n-1)}=\sigma\times\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}v_i^2\right)}{n-1}}$ ...(4.4) となる，$\sqrt{\quad}$ 内は常に1に equal でなければならぬ，一般的に $\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}v_i^2\right)\neq 1$ ....(4.5) であり，1に equal でない分だけ σ_0 の誤差でありそれは見積りにくい。次ぎに標準偏差 $\sigma_i\ (i=1,2,\cdots n)$ が1律に β 倍になったとすれば $p_i=\sigma^2/\sigma_i^2\ (i=1,2,\cdots n)$ から $p_i''=\sigma^2/(\sigma_i\times\beta)^2=(1/\beta^2)\times\frac{\sigma^2}{\sigma_i^2}=(1/\beta^2)p_i$ ...(4.6), (4.1)式の p_i を p_i'' におきかえて $\sigma_0''=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(1/\beta^2\cdot p_i v_i^2)}\div\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\cdot 1/\beta^2\right)(n-1)}=\pm\sqrt{1/\beta^2\cdot\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{\frac{1}{\beta^2}\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)(n-1)}=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i\cdot v_i^2)}\div\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{}p_i\right)(n-1)}$ ....(4.7) となり $\sigma_0''=\sigma_0$ で $p_i\ (i=1,2,\cdots n)$ が1律に $1/\beta^2$ 倍になってもその効果は出ない (3.11)式の形によると $\sigma_0''=\pm 1\div\sqrt{1/(\beta\sigma_1)^2+1/(\beta\sigma_2)^2+\cdots\cdots+1/(\beta\sigma_n)^2}=\pm(1\times\beta)\div\sqrt{1/\sigma_1^2+1/\sigma_2^2+\cdots+1/\sigma_n^2}=\sigma_0\times\beta$ ....(4.8) と明らかに σ_0 は改善されて β 倍になる 定性的にもそうであってそうならない点からだけでも(4.1)式は誤用解の証明である

§5. 結言

測量では正規分布の誤差を扱う．当然標準偏差が既知であらねばならぬ，1称観測値についての標準偏差 $\sigma=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}v^2}\div\sqrt{n-1}$ ....(1.3) が成立しても 異った精度 $p_i\ (i=1,2,\cdots n)$ の観測値 $M_i\ (i=1,2,\cdots n)$ において $v_i=X_0-M_i$, $p_i=\sigma^2/\sigma_i^2\ (i=1,2,\cdots n)$ として 充分な検討なしに(1.3)式を真似して $\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}(p_i v_i^2)}\div\sqrt{n-1}$ も equal σ となると速断したところに(4.1)式という誤用解が生まれたわけである。重み p はもと計算の省力を目的としたものであったのに却って残差の2乗 v^2 を必要とし且つ p が新らたな意味を付加していると考える様にさえなったのであろう 計算機が手軽になった今日正確な(3.11)式を用いる可きであろう $1/\sigma^2$ として苦もなく計算される。（1986.3.5）