Ⅳ-234　デミングのあてはめ公式を直線の場合に利用する際の注意

八戸工業大学　正会員　岩渕　清行

1. はじめに

デミングの解法公式とは、nケの測定点 (x_i, y_i)．$i=1,2,3,\dots,n$．$n \geqq 3$ が与えられた時、x_iにもy_iにも誤差をともない、しかもそれらの重みが等しくない一般の場合の あてはめ曲線を求めるものである。

以下において、このデミングの解公式は、x_iにもy_iにも誤差をともなうが、それらの重さが 軸ごとには等しいとゆう場合の、直線あてはめには適用出来ないことを証明し、ついで、この場合に対する、最も確からしい直線を与える解法の試案を示す。

2. 直線あてはめの場合に限定した デミングの解公式

最確直線を $y=ax+b$，　条件方程式を　$y_i+\Delta y_i = a(x_i+\Delta x_i)+b$ ……………(1)

目的函数を $f \equiv \sum_{i=1}^{n}(px_i * \Delta x_i^2 + py_i * \Delta y_i^2)$ とすると、実際の計算式は次の如くになる。ここに、px_i，py_i は夫々 Δx_i，Δy_i の重さであって、既知数である。

$$\boxed{\begin{array}{l} a = a\text{の近似値},\quad b = b\text{の近似値} \\ W_i = ax_i + b - y_i,\quad P_i = 1/(a^2/px_i + 1/py_i),\ Z = [Px^2][P]-[Px]^2 \\ \Delta a = ([Px][PW]-[PWx][P])/Z,\quad \Delta b = ([PWx][Px]-[Px^2][PW])/Z \\ a = a+\Delta a,\quad b = b+\Delta b \qquad \text{くりかえし計算をする.} \end{array}} \quad \cdots\cdots(2)$$

[ ] はガウスの総和記号で、[ ] 内の P は P_iを意味する。この式の導き出し方は、条件方程式を線形化して

$$\Delta y_i - a\Delta x_i - x_i\Delta a - \Delta b = W_i \quad \cdots\cdots(3)$$

とし、目的函数を最小にする如く、ラグランジュの未定係数を用いて正規方程式をつくり、元数を落して、Δa，Δb だけの 正規方程式

$$\left.\begin{array}{l} [Px^2]\Delta a + [Px]\Delta b = -[PWx] \\ [Px]\Delta a + [P]\Delta b = -[PW] \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

となし、これを クラメルの公式で解いたもので、$\Delta a \fallingdotseq 0$，$\Delta b \fallingdotseq 0$ となった時、$\Delta x_i = -aP_iW_i/px_i$，$\Delta y_i = P_iW_i/py_i$ となる。その値は、当然ながら 元数をおとす前の $(3n+2)$元 連立一次方程式 をそのまゝ解いた時 の結果と同じである。

3. $px_i = C_1$，$py_i = C_2$ の時のデミング解

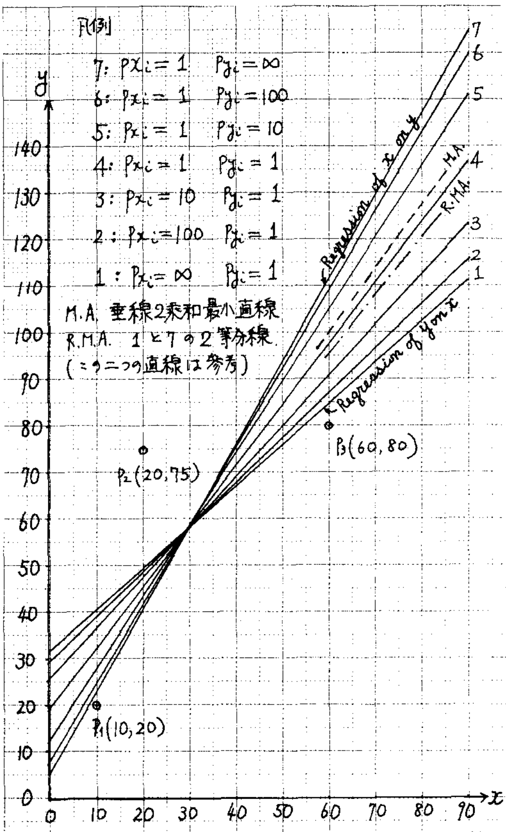
意味するところは、すべてのiにつき px_i が 一定正常数C_1 で、また すべてのiにつきpy_i が一定正常数C_2 の時の解とゆうことである。このような場合、(2)における P_iは iに無関係 になるため、結果的に (4)に 相当する 正規方程式が重さに無関係な

$$\left.\begin{array}{l} [x^2]\Delta a + [x]\Delta b = -[Wx] \\ [x]\Delta a + n\cdot\Delta b = -[W] \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

となる。従って、例えば $(px_i=1, py_i=1)$ の時、$(px_i=1, py_i=10)$ の時，或は $(px_i=\infty, py_i=1)$ の時、或はさらに $(px_i=1, py_i=\infty)$ の 時 の a，bは、すべて同じ 値となる。所で (5)なる正規方程式は、yのxの上への回帰直線を求める時のいわゆる観測方程式を形式的に線形化した場合の 正規方程式そのものである。従って、結果は常に、yのxの上への回帰直線しか出てこない。これは不合理である。デミング解は、$px_i=C_1$，$py_i=C_2$ の場合、$px_i=\infty$, $py_i=1$ 以外は、確からしい直線を与えるものではない。

4. $px_i=C_1$，$py_i=C_2$ の時の最も確からしい直線について．

すべてのiについて px_i が一定値，py_iが一定値とゆう場合の両極端に $(px_i=\infty, py_i=1)$ の直線と $(px_i=1, py_i=\infty)$ の直線 とがある（第1図参照）．前者は yのxの上への回帰直線，後者は、xのyの上への回帰直線である。これらは、重心において交わっている。px_iやpy_i が夫々 ∞ から 1まで変化



第1図. 3点 P_1, P_2, P_3 を通る あてはめ直線.
番号 1乃至7の直線は 新公式による.
1は Yの Xの上への回帰直線と一致する.
7は Xの Yの上への回帰直線と一致する.

した あらゆる組合せの場合において.（但し $px_i=\infty, py_i=\infty$ とゆうことはない。）最も確からしいあてはめ直線は この二つの回帰直線の中に入ってくるものであろうと予想される.

さて これら回帰直線を求める時 何の2乗和を最小にする如く直線をきめたか. それは 測点から直線えの「斜距離」であった。そして その斜距離を示す線分を含む直線が、x 軸となす（正の）角は、y on x 回帰直線では $90°$，x on y 回帰直線では $180°$ であった。今一般にこの角を θ とし (x_i, y_i) から 最確直線までの斜距離を L_i とすると. L_i は、次の連立方程式から.

$$\begin{cases} y_i + \Delta y_i = a(x_i + \Delta x_i) + b \\ \Delta y_i = L_i \sin\theta \ , \ \Delta x_i = L_i \cos\theta \end{cases}$$

$$L_i = (ax_i + b - y_i)/(\sin\theta - a\cos\theta)$$

となる. 従って我々は 目的函数を $f \equiv \sum_{i=1}^{n} L_i^2$ と定め この f が最小となる如く最確直線を求めることにする. この θ は. 右上り直線なら $90°\sim180°$, 右下り直線なら $0°\sim90°$ を考えればよい. 従って一般に $0° \leqq \theta \leqq 180°$ において θ を考える. 実際に計算を実行すると,

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\theta(n[xy]-[x][y]) - \cos\theta(n[y^2]-[y]^2)}{\sin\theta(n[x^2]-[x]^2) - \cos\theta(n[xy]-[x][y])} \\ b &= [y]/n - [x]/n * a \end{aligned}} \cdots(6)$$

となる。この公式の使い方は. 例えば右上り直線の時 $\theta=90°$ とすれば 当然ながら y on x 回帰直線となり. $\theta=180°$ とすれば x on y 回帰直線となる。θ を $90°$ から $180°$ まで連続的にかえると. y on x と. x on y の間の（重心を通る）すべての直線がえられる.（θ は $180°$ 周期）

Px_i と Py_i が夫々一定値として与えられた時の使用法は 次の通りである. まず

$$\boxed{\theta \equiv \tan^{-1}\left(\pm\sqrt{px_i/py_i}\right)} \cdots\cdots\cdots (7)$$

とおく。θ は. 常に $0°$ から $180°$ までの値であらわすことにする。複号のため、θ は2つの値が出てくるが. その θ を用いて (6)式より a, b を求め、目的函数を計算し. それが大なる答は不適とする。但し実際には、右上り直線の時には、$90° \leqq \theta \leqq 180°$ の θ の解が適解となるから その計算は不要である。数値計算の結果のグラフ（第1図）から. わかるように、かくして求めた解直線は、まさに、先に予想していた直線となっており. 与えられた Px_i, Py_i に対する最も確からしい直線と信ずべきものである. なお (6)式の a の分母を0とする θ の時解直線は得られないが. それは. 重心を通る y 軸に平行な直線で、問題とはならない。

5. むすび

デミングの解公式で 求め得なかった 場合の 最も確からしいあてはめ直線が (6),(7)式により求められる. この新解法は. px_i や py_i が変化する時には 使用するものではない。そうゆう場合には、デミング解は適当な直線を与えるものである。但し、Px_i が変化しても Py_i が ∞ の時には、デミング解は 正しい答を与え得ない。

$Py_i=\infty$ の時には. $Z=[P][pxy]-[px][py]$, $a=([p][py^2]-[py]^2)/Z$, $b=([py][pxy]-[px][py^2])/Z$ ………… (8)

を 専用するとよい。(8)式は. $\Delta y_i=0$ の時の一つ の専用（一般解）公式で. [ ] 内の P は Px_i である.（$\Delta y_i=0$ の時 (3)式は使えない）

6. 参考文献

本間仁，春日屋伸昌「次元解析・最小2乗法と実験式」コロナ社 25版 PP. 255〜262