土木学会第41回年次学術講演会（昭和61年11月）

Ⅳ-82　Lie 群論による世帯の嗜好変化と住宅市場の保存則に関する考察

京都大学工学部　正　員　吉川　和広
京都大学工学部　正　員　小林　潔司
京都大学工学部　学生員　○張　衛彬

1．はじめに－－－近年、人々の価値観は多様化してきており、世帯の住宅立地に関する嗜好や効用も変化しつつある。このような住宅市場の構造的な変化に対して分岐理論やカタストロフィ理論を用いて構造変化そのものを直接モデル化しようという試みが欧米諸国で進んできている。しかし、これらの研究は物理学の分野の理論を都市モデルの動学化に適用しようとするものであり、立地主体の行動原理を内蔵しているわけでない。本来、我々がモデルを作成しようとする場合、対象とする現象の中から本質的であると考えるメカニズムを構造として抽出してこれをモデルとして記述することとなるが、その際、モデルとして抽象化した構造が、分析の対象とする期間のなかで安定的である、あるいは少なくとも工学的な判断から近似的にせよ安定していると考えても差支えがないという事を想定している。住宅市場の構造変動に対処する方法としては次の二つが考えられる。一つの方法は、起こりうる構造変動を内蔵しうるモデルを作成する方法であり、今一つの方法は将来の構造を仮想的に想定したモデルを作成し思考実験を行うというやり方である。この場合、仮想的な構造を持つモデルを統計的な方法で作成することには限界がある。本研究では、前者の立場、すなわち、環境や嗜好が変動している「場」の中でも、対象とする現象を安定的にモデル化しうる方法を開発するという立場に立つこととした。すなわち、住宅市場における人々の嗜好の変化をＬｉｅ群論における無限小変換を用いて記述するとともに、世帯の嗜好の変化を内蔵しうる都市モデルの開発をめざしたものである。このようなLie 群論を用いた研究は始まったばかりで、まだ体系的な研究を行うに至っていないが、住宅市場におけるデベロッパーの行動を対象として若干の成果を得たのでここに報告する。

2　基本モデルの定式化と世帯の嗜好変化の記述－－－本研究では、期待利潤最大化という行動仮説に基づいてデベロッパーの行動を式(1) に示すような動学モデルとして定式化する。動学モデルの変数としては、各住宅地の立地条件を示すＡ、デベロッパーが開発した施設の整備水準を示す変数Ｑをとりあげている。デベロッパーの住宅地の開発費用は住宅地の立地条件Ａ、施設の建設量$\dot{Q}$の関数として記述されると考える。本研究ではまず、世帯の嗜好の変化を考えない場合におけるデベロッパーの行動を分析したが、その詳細は参考文献に譲るとして、ここでは、世帯の住宅地の立地条件や住宅の質に対する嗜好が変化した場合に、それがデベロッパーの行動にどのような影響を及ぼすのかを分析する。さて、基本モデルにおける変数は実際には何らかの測定単位を用いて計測される。世帯の嗜好が変化した場合、測定単位そのものの意味が変る。数学的に表現すれば基本モデルの変数は測定単位を与える局所座標系で記述されるが、嗜好が変れば局所座標系そのものが変化する。この様な局所座標系間の変換関係を示すのが無限小変換であり、式(2) に示すような無限小変換により、任意の時間のモデルの変数をある基準年次での局所座標系に統一できる。一般に、局所座標系が変れば、基本モデルそのものの構造が変ってしまう。ここで、嗜好変化が起っても同じ基本モデルを用いてディベロッパーの行動を分析できるかどうか、すなわち基本モデルの無限小変換変換に対する不変性を式(3) (4) で定義する。式(3) は式(5) で示される利潤の現在価値が無限小変換に対して不変であることを示し、式(4) は利潤の現在価値を示すモデル式の構造は変らないという条件を示す。

3．住宅市場における保存則－－－　一般に、任意のタイプの嗜好の変化に対して基本モデルにより常にデベロッパーの行動を分析できるとは限らない。そこで、まず嗜好変化（無限小変換）の作用に対して

この基本モデルが不変である一般的な条件を求めたが、この条件は定理１のように示される。次に式(6) (7) を無限小変換に対して解くことにより定理２に示すような無限小変換が満たすべき条件が求まる。観測される無限小変換が定理２を満足しない場合には基本モデルでデベロッパーの行動を分析できないこと

を意味し，この場合問題の設定自体を変えなければならない。さらに、定理２とNoether の定理により、 基本モデルの最適解が無限小変換に対して不変である条件を求める（定理３）。このようにして求めた最適性条件は住宅市場内部にある不変な構造（関係）を示し、住宅市場の保存則と呼ぶこととする。保存則を解くことにより、嗜好変化と動的整合性の取りうる効用関数、収益関数、費用関数の一般形が求まる。しかし、保存則は非線形偏微分方程式となり一般解を求めることは不可能なので、本研究では定理２を満足するような無限小変換のタイプを種々想定し、保存則を満足するような効用関数、収益関数、費用関数の形式を求めた。その結果の一部を表１に示す。以上の分析より以下のような理論的成果を得た。1)期待利潤最大化という行動仮説に基づいた基本モデルと整合がとれるような嗜好変化のパターンは住宅の広域的な立地条件に対する嗜好が増加し、住宅の質、アメニティといった局所的環境に対する嗜好が逆に低下する場合、あるいはその逆の場合である。2)収益関数が開発事業の限界費用の関数として示される場合、嗜好変化に対して基本モデルの動的な整合性を保ちうる。3)効用関数が利潤に関して線形・expornential関数で与えられる場合、基本モデルは嗜好変化に対して動的な整合性を図れるが、log 関数の場合基本モデルを解析的な形であたえられない。4)建設コストに規模の効果が現れずデベロッパーの間で完全競争が成立している場合には嗜好の変化に応じてデベロッパーは超過利潤を得ることができる。5)建設費用に規模の効果が存在する場合には、デベロッパーは規模の効果と嗜好の変化による超過利潤を得る。6)いずれの不変性の定義に対しても同様の結論を得られる。今後は、デベロッパーだけでなく世帯の行動の分析を行い住宅市場に関する分析をすすめるとともに、無限小変換の実証的な推計方法に関して研究を行うことが必要であると考る。

$$\mathrm{Max}\ \int_0^T U(R(A,Q)-C(A,\dot{Q}))\exp(-kt)dt \qquad (1)$$

$$\bar{t} = t + \tau\varepsilon + O(\varepsilon) \quad \bar{A} = A + \xi_1\varepsilon + O(\varepsilon)$$

$$\bar{Q} = Q + \xi_2\varepsilon + O(\varepsilon) \qquad (2)$$

$$L(\bar{A},\bar{Q},\dot{\bar{Q}},\bar{t}) - L(A,Q,\dot{Q},t) = O(\varepsilon) \qquad (3)$$

$$L(\bar{A},\bar{Q},\dot{\bar{Q}},\bar{t}) - L(A,Q,\dot{Q},t) = \varepsilon\, d\Phi/dt + O(\varepsilon) \qquad (4)$$

$$L(A,Q,Q,t) = U(R(A,Q)-C(A,\dot{Q}))\exp(-kt) \qquad (5)$$

［定理１］基本モデルが動的不変であるための必要条件。$\tau = a\exp(kt) + \Psi(A)$、$\xi_1 = \Sigma_j(\partial C/\partial\dot{Q}\,\partial\xi_2/\partial t - \xi_2\,\partial R/\partial Q)(\partial R/\partial A - \partial C/\partial A)^{-1}$、 (6)

$$\Sigma_j\,\xi_{2j}\,\partial C/\partial\dot{Q} = ak\exp(kt)(\Sigma_j\,\dot{Q}_j\,\partial C/\partial\dot{Q}_j) + \phi(A) \qquad (7)$$

［定理２］無限小変換が以下の条件を満足すれば、基本モデルは嗜好変化に対して動的不変である。

(1) 費用関数が線形　$\xi_1 = (\partial C/\partial\dot{Q}\,\partial\xi_2/\partial t - \xi_2\,\partial R/\partial Q)/(\partial R/\partial A - \partial C/\partial A)$、$\xi_{2j} = ak\exp(kt)(\Sigma_i\,\lambda_{ij}Q_i) + \psi_j(A)$、$\Sigma_i\,\lambda_{ij}p_i = p_j$、$\Sigma_j\,p_j\psi_j(A) = \phi(A)$

(2) 費用関数が非線形　a) $\tau = a\exp(kt) + \Psi(A)$、$\xi_1 = 0$、$\xi_2 = 0$、あるいは、b) $\tau = a\exp(kt) + \Psi(A)$、$\xi_1 = (\partial C/\partial\dot{Q}\,\partial\xi_2/\partial t - \xi_2\,\partial R/\partial Q)(\partial R/\partial A - \partial C/\partial A)^{-1}$、$\xi_{2j} = \psi_j(A,Q)$、$\Sigma_j\,\psi_j(A,Q) = -\zeta(A)\,\psi_m(A,Q)$

［定理３］基本モデルの最適解が嗜好変化に対し不変である条件は以下の保存則のいずれかが成立することである。

$$\Omega = (a\exp(kt) + \Psi(A))(U + p\dot{Q}U')\exp(-kt) + \xi_2\,pU'\exp(-kt)$$

$$\Omega = (a\exp(kt) + \Psi(A))(U + \dot{Q}\,\partial C/\partial\dot{Q})$$

$$\Omega = (a\exp(kt) + \Psi(A))(U + U'\dot{Q}\,\partial C/\partial\dot{Q})\exp(-kt)$$

R:収益関数、C:費用関数、U:効用関数、K:割引率、T:目標年次

$\Psi(A)$, $\phi(A)$, $\psi_j(A)$, $\zeta(A)$:任意の関数、 a, ε：パラメータ

τ, ξ_1, ξ_2 ：無限小変換, p_i 住宅開発費用、Ω: 定数である

表１　無限小変換と収益関数・効用関数の関係

(1) Case1 ($\tau=1$、$\xi_1=0$、$\xi_2=0$)　　　ν: 定数

a)($U=\alpha+\beta F$) $R = C - \dot{Q}\,\partial C/\partial\dot{Q} - (\alpha+\nu)/\beta$

b)($U=\exp(\alpha+\beta F)$) $R = C + 1/\beta\cdot\ln(\nu/(\beta MC+1)) + \alpha/\beta$

(2) Case 2($\tau=1$、費用関数が線形の場合)

a)($U=\alpha+\beta F$) $R = C - (p\dot{Q}-\phi(A)) - (\alpha+\nu\exp(kt))/\beta$

b)($U=\exp(\alpha+\beta F)$) $R = c + 1/\beta\cdot\ln(\nu/(\beta p\dot{Q} - \beta\phi(A) + 1)) + \alpha/\beta$　　($MC = \dot{Q}\,\partial c/\partial\dot{Q}$)

(3) Case 3 ($\tau=1$、費用関数が非線形の場合)

a)($U=\alpha+\beta F$) $R = C - \dot{Q}\,\partial C/\partial\dot{Q} = -(\alpha+\nu\exp(kt))/\beta$

b)($U=\exp(\alpha+\beta F)$) $R = C + 1/\beta\cdot\ln(\nu\exp(kt)/(\beta MC + 1)) + \alpha/\beta$

（参考文献）W.B.Zhang,K.Kobayashi,K.Yoshikawa:Study on Dynamic Approach for Housing Market by means of Noether Theorem ,Kyoto Univ. R.P.85-PT-01 ,1985