Ⅳ-62　諸変量の観測誤差を考慮した最適公共投資配分に関する基礎的考察

信州大学　正員　奥谷 巌
長野高専　正員　○柳沢吉保

1. まえがき

公共投資による公共土木施設の建設は関連地域に大きな外部経済的効果をもたらす。しかし土木施設に投下しうる資金は限られているので，この限られた資金を最も効率的に使用するための，最適な投資配分量と建設順序等を決定しなければならない。

ある経済的目標の達成のための投資活動等による経済効果の有効な計測方法として，計量経済モデルによる分析があるが，従来試行錯誤的であったため，信頼性等の点で問題点があった。これらの問題点を解消するための最適化問題の定式化[1]，さらにその最適化問題の不確定条件下における定式化[2]については既に報告済みである。そこで本研究では，さらに実際問題として調査・観測される経済要因とその真値との間に誤差が含まれる場合についての不確定条件下での考察を行なう。

2. 動的な確率システムの定式化

t 期における内生変数を $X(t)$，外生変数を $V(t)$，投資量を示す政策変数を $Y(t)$ とすると，線形の計量経済モデルは　$X(t)=A_1X(t)+\sum_{m=1}^{M}A_2(m)X(t-m)$

$$+\sum_{m=1}^{M}B_1(m)Y(t-m)+\sum_{m=0}^{M}C_1(m)V(t-m)+D'+\varepsilon'(t) \qquad (1)$$

のような一般式で表わすことができる。ここで，$X(t)$，$Y(t)$，$V(t)$ はそれぞれ n_1，n_2，n_3 次元ベクトルとしたとき，A_1，$A_2(m)$ は $n_1\times n_1$，$B_1(m)$ は $n_1\times n_2$，$C_1(m)$ は $n_1\times n_3$ のパラメータ行列であり，D' は n_1 次元の定数ベクトル，$\varepsilon'(t)$ は n_1 次元の誤差ベクトルである。また，M はモデル中に含まれる最大の時間遅れである。

式(1)は次のようなシステム方程式

$$x_t=\Psi x_{t-1}+\Gamma u_{t-1}+\Phi v_{t-1}+d+\xi_{t-1} \qquad (2)$$

に変換することができる。（x_t：状態量，u_t：政策変数，v_t：外生変数，d：定数項，ξ_t：誤差項）$n=n_1\cdot M$ とすると，x_t, d, ξ_t はともに n 次元ベクトルであり，u_t は n_2，v_t は $2n_3$ 次元ベクトルである。Ψ, Γ, Φ はそれぞれ $n\times n$，$n\times n_2$，$n\times n_3$ 行列であり，$A(m), B(m), C(m)$ によって表わされる。

いま，目的関数が $J=\sum_{t=1}^{N}W_t=\sum_{t=1}^{N}(a_tx_t+g_{t-1}u_{t-1})$ ---(3) と与えられた場合，(3)式を最小にする u_t を求めることとする。ここで ξ_t が確率変数とすると，(2)式の x_t も確率変数となるため，(3)式の期待値をとったものを評価基準としなければならない。よってここでは $E(J)=\sum_{t=1}^{N}E(a_tx_t+g_{t-1}u_{t-1})$ ---(4) を最小にする $u_0,\cdots,u_{N-1}$ を求める。

(a)観測値 y_t が誤差を含まない場合

この場合の理論展開については既に報告済みである[2]。よってここでは一般的な第 k 期についてのみ記述する。

$$v_k=\tilde{a}_k\Psi x_{k-1}+(\tilde{a}_k\Gamma+g_{k-1})u_{k-1}+\tilde{b}_k \qquad (5)$$

を線形制約条件　$H_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})\leqq 0$　　(6)

の下に最小化することによって，$u^*_{k-1}=A_{k-1}x_{k-1}+b_{k-1}$ (7)

のように求められる。ただし

$$\tilde{a}_k=a_k+\tilde{a}_{k+1}\Psi+(\tilde{a}_{k+1}\Gamma+g_k)A_k$$

$$\tilde{b}_k=(\tilde{a}_{k+1}\Gamma+g_k)b_k+\tilde{a}_k(\Phi v_{k-1}+d+\theta_1)+\tilde{b}_{k+1}$$

$\tilde{a}_{N+1}=0,\ g_N=0,\ b_{N+1}=0\quad (k=1,2,\cdots,N)$ である。

このように，線形の目的関数を線形の制約条件式と式(2)のようなシステム方程式の下で最適化する場合，目的関数が式(3)のようになっている限り，初期値 x_0 と，誤差項 ξ_k の期待値が与えられると，各期の最適政策変数が決定されることがわかる。

(b)観測値 y_t が誤差を含む場合

調査・観測される値とその真値との間に

$y_t=x_t+\eta_t$ ----(8) という関係があると仮定する。システム方程式は式(2)を用い，$E(J)=\sum_{t=1}^{N}E(a_tx_t+g_{t-1}u_{t-1})$ を最小にする $u_0, u_1,\cdots, u_{N-1}$ を，ある線形制約条件

$$H_t(\mu_t, u_t)\leqq 0 \qquad (t=0,1,\cdots,N-1) \qquad (9)$$

の下で求めることを考える。ここで η_t は観測誤差であり，その性質は　$E(\eta_t)=\theta_2$，$E(\eta_t\eta_t^T)=\Sigma_\eta$（既知）

$$E(\eta_t\eta_{t'}^T)=0,\ E(\xi_t\eta_t^T)=0,\ t'\neq t \ \text{-----} \qquad (10)$$

と仮定する。また μ_t は $E(x_{t-1}\,|\,y^{t-1})$ であり，

$$\mu_t=\Sigma_t^{xx}(\Sigma_\xi+\Psi\Sigma_{t-1}^{xx}\Psi)^{-1}(\Psi\mu_{t-1}+\Gamma u_{t-1}+\Phi v_{t-1}+d+\theta_1)+\Sigma_t^{xx}\Sigma_\eta^{-1}(y_t-\theta_2),\ \Sigma_t^{xx}=(M_t^{-1}+\Sigma_\eta^{-1}),$$

$$M_t=\Sigma_\xi+\Psi\Sigma_{t-1}^{xx}\Psi^T \ \text{-----} \qquad (11)$$

である。まず最後の期間について，$E(W_N)$ の最小化を行なうものとしたとき，観測値が与えられるので，

$$E(\overline{W}_N)=E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})$$
$$=E(E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})) \quad (12)$$

となる。表記法としてy^{N-1}は$y_1,y_2,\cdots y_{N-1}$を表わしている。ここに(12)式の外側のEはy^{N-1},u^{N-2}に関してとる期待値を意味している。(12)式の関係から，すべてのy^{N-1}，u^{N-2}について$E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})$を最小にするならば，$E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})$も最小化できることがわかるから，$E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})$の最小化について考える。チェーン・ルールを用いて，

$$E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})$$
$$=\int(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N,u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})d(x_N,u_{N-1})$$
$$=\int(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1})p(x_N|x_{N-1},u_{N-1},v_{N-1})$$
$$\times p(x_{N-1}|y^{N-1},u^{N-1},v^{N-1})\rho_{N-1}(u_{N-1})d(x_N,x_{N-1},u_{N-1})$$
$$=\int\lambda_N\rho_{N-1}(u_{N-1})du_{N-1} \quad (13)$$

となる。ここでλ_Nについては

$$\lambda_N=a_N\Psi\mu_{N-1}+(a_N\Gamma+g_{N-1})u_{N-1}+a_N(\Phi v_{N-1}+d+\theta_1) \quad (14)$$

である。いま，(13)式を最小にするu_{N-1}をu_{N-1}^*とすると最適なρ_{N-1}^*は$\delta(u_{N-1}-u_{N-1}^*)$である。定義として

$\nu_N^*\triangleq\min_{u_{N-1}}\nu_N$，ここで$\nu_N=\lambda_N$ ---(15)とすると

$$\min_{\rho_{N-1}}E(a_N x_N+g_{N-1}u_{N-1}|y^{N-1},u^{N-2})=\nu_N^* \quad (16)$$

となる。したがって，最終期間については，u_{N-1}^*を求めれば最適化の操作は終了することになる。ここでは(14)式を線形制約条件$H_{N-1}(\mu_{N-1},u_{N-1})\leqq 0$の下において最小化すればよい。最適な$u_{N-1}^*$は一般に

$u_{N-1}^*=A_{N-1}\mu_{N-1}+b_{N-1}$ ---(17)と表わされる。ここに，A_{N-1}は$n_2\times n$のパラメータ行列，b_{N-1}はn_2次元の定数ベクトルである。(17)式を(14)式へ代入すると

$$\nu_N^*=a_N\Psi\mu_{N-1}+(a_N\Gamma+g_{N-1})(A_{N-1}\mu_{N-1}+b_{N-1})$$
$$+a_N(\Phi v_{N-1}+d+\theta_1) \quad (18)$$

となる。次に，y^{N-2},u^{N-3}が与えられているとして，最後から2つの期間について最適化を行なう。すなわち　$E(E(\overline{W}_{N-1}(x_{N-1},u_{N-2})+\overline{W}_N(x_N,u_{N-1})|y^{N-2},u^{N-3}))$を最小化する。まず$E(\overline{W}_{N-1}(x_{N-1},u_{N-2})|y^{N-2},u^{N-3})$について

$$E(a_{N-1}x_{N-1}+g_{N-2}u_{N-2}|y^{N-2},u^{N-3})$$
$$=\int\lambda_{N-1}\rho_{N-2}(u_{N-2})du_{N-2} \quad (19)$$

と書ける。一方，$E(\overline{W}_N|y^{N-2},u^{N-3})$については，$y_{N-1}$が与えられたときの$u_{N-1}$が(17)式のように決まっているので，最適化の過程ではその値を用いた$\overline{W}_N^*$を用いる。

$$E(\overline{W}_N^*|y^{N-2},u^{N-3})$$
$$=E(\int\lambda_N\rho_{N-1}(u_{N-1}^*)du_{N-1}|y^{N-2},u^{N-3})$$
$$=\int\nu_N^*p(y_{N-1}|y^{N-2},u^{N-3})\rho_{N-2}(u_{N-2})d(y_{N-1},u_{N-2}) \quad (20)$$

となるので，最後から2つの期間に対する最適化については，式(19),(20)を用いると

$$\min_{\rho_{N-2}}E(\overline{W}_{N-1}+\overline{W}_N^*|y^{N-2},u^{N-3})$$
$$=\min_{\rho_{N-2}}\int[\lambda_{N-1}+\int\nu_N^*p(y_{N-1}|y^{N-2},u^{N-2})dy_{N-1}]\rho_{N-2}(u_{N-2})$$

$\times du_{N-2}$ ---(21)となる。定義として

$$\nu_{N-1}\triangleq\lambda_{N-1}+\int\nu_N^*p(y_{N-1}|y^{N-2},u^{N-3})dy_{N-1} \quad (22)$$

とおく。ν_{N-1}はu_{N-2}の関数であり，ν_{N-1}を最小化するu_{N-2}をu_{N-2}^*とおくと(21)式を最小化する最適なρ_{N-2}は$\rho_{N-2}^*=\delta(u_{N-2}-u_{N-2}^*)$である。(21)式より

$$\min_{\rho_{N-2}}E(\overline{W}_{N-1}+\overline{W}_N^*|y^{N-2},u^{N-3})=\nu_{N-1}^* \quad (23)$$

となるので　$\min_{u_{N-2}}\nu_{N-1}=\nu_{N-1}^*$ ---(24)となり，最後から2つの期間についても，y^{N-2},u^{N-3}が与えられた時点で一義的に決定してよいことになる。u_{N-2}^*の決定については，(18),(22)式より

$$\nu_{N-1}=\widehat{a}_{N-1}\Psi\mu_{N-2}+(a_{N-1}\Gamma+g_{N-2})u_{N-2}+\widehat{b}_{N-1} \quad (24)$$

を線形制約条件$H_{N-2}(\mu_{N-2},u_{N-2})\leqq 0$の下に最小化することにより　$u_{N-2}^*=A_{N-2}\mu_{N-2}+b_{N-2}$　(25)　のように決定される。ただし

$$\widehat{a}_{N-1}=a_{N-1}+\widehat{a}_N\Psi+(\widehat{a}_N\Gamma+g_{N-1})A_{N-2}$$
$$\widehat{b}_{N-1}=\widehat{a}_{N-1}(\Phi v_{N-2}+d+\theta_1)+(\widehat{a}_N\Gamma+g_{N-1})b_{N-1}+\widehat{b}_N$$
$$\widehat{b}_N=a_N(\Phi v_{N-1}+d+\theta_1)\ ,\quad \widehat{a}_N=a_N$$

である。これを一般的な第k期について表わすと

$$\lambda_k=a_k\Psi\mu_{k-1}+(a_k\Gamma+g_{k-1})u_{k-1}+a_k(\Phi v_{k-1}+d+\theta_1) \quad (26)$$

となり　$\nu_k=\widehat{a}_k\Psi\mu_{k-1}+(\widehat{a}_k\Gamma+g_{k-1})u_{k-1}+\widehat{b}_k$　(27)

をある線形制約条件$H_{k-1}(\mu_{k-1},u_{k-1})\leqq 0$の下に最小化することによって，$u_{k-1}^*=A_{k-1}\mu_{k-1}+b_{k-1}$ ---(28)のように求められる。ただし(27)式において

$$\widehat{a}_k=a_k+\widehat{a}_{k+1}\Psi+(\widehat{a}_{k+1}\Gamma+g_k)A_k$$
$$\widehat{b}_k=\widehat{a}_k(\Phi v_{k-1}+d+\theta_1)+(\widehat{a}_{k+1}\Gamma+g_k)b_k+\widehat{b}_{k+1}$$

$\widehat{a}_{N+1}=0,\ g_N=0,\ b_{N+1}=0\ (k=1,2,\cdots,N)$である。

このことより，線形の目的関数(3)を線形の制約条件(9)，システム方程式(2)，観測方程式(8)の下で最適化を行なった場合と，(a)の観測誤差がない場合の最適化とを比較すると，以外にも政策的に，投資割合が同じになるという事がわかった。

3. 参考文献

1)「土地利用の統計的制御の適用性」：奥谷巌，柳沢吉保

2)「不確定条件下における公共投資に関する基礎的考察」：奥谷巌，柳沢吉保