

III-324

Kalmanフィルタ有限要素法による弾性係数の同定解析

京都大学農学部 正会員 ○村上 章

同上 正会員 長谷川高士

1. はじめに

Kalmanフィルタと有限要素法との結合解法により、二次元静的釣合い問題における弾性係数を節点観測変位から推定する。ここでの未知数となる弾性係数は均質と想定した領域におけるLaméの定数(λ, μ)あるいは、非均質と想定した領域における異なる弾性係数 E_i である。ここに有限要素法は空間離散化にのみその役割を果たし、Kalmanフィルタは離散化式を定式化に繰込み、未知数の逐次推定に役割を果たす。

2. 定式化

本文でのKalmanフィルタの適用は表-1の範疇という同定問題である。従って、定式化の主眼はKalmanフィルタの基礎式((1),(2)式)のひとつである観測式におく。構造骨格のみから成る土の剛性方程式は有限要素法で容易に離散化され((3)式)、 p_i にはLaméの定数や非均質領域の異なる弾性係数のいずれかを選ぶことができる。観測がなされている節点以外の節点における変位成分は、この場合未知となるので、これを除外するために Static Condensation を実行して次元を減らすと最終的に(6)式を得る。¹⁾

Cividiniらはこの式を基本としてBayesアプローチにより解析を行った¹⁾が、ここではフィルタリングのために(6)式を観測式に充当し、状態式には定常条件をあてはめることでフィルタ基礎式の各項との対応は(7)式ようになる。

$$\text{Kalmanフィルタ 観測式} \quad \{y\}_t = [H]_t \{x\}_t \quad (1)$$

$$\text{状態式} \quad \{x\}_{t+1} = [F]_t \{x\}_t \quad (2)$$

$$[K]\{u\} = \{f\} \text{ i.e. } p_i [K^i] \{u\} = \{f^*\} \quad (3)$$

$$[p_j]([K_{11}^j] - [Q(p_i)][K_{21}^j])\{u^*\} = \{f^*\} - [Q(p_i)]\{f\} \quad (4)$$

$$[Q(p_i)] = (p_j [K_{12}^j]) \cdot (p_1 [K_{22}^1])^{-1} \quad (5)$$

$$([K_{11}^j] - [Q(p_i)][K_{21}^j])\{u^*\} [p_j] = \{f^*\} - [Q(p_i)]\{f\} \quad (6)$$

$$\{y\}_t = \{f^*\} - [Q(p_i)]\{f\}, \{x\}_t = \{p_i\}_t, [F] = [I] \quad (7)$$

$$[H] = ([K_{11}^j] - [Q(p_i)][K_{21}^j])\{u^*\}$$

表-1 Kalmanフィルタを適用する立場

状態式——パラメータ定常条件	} 同定問題
観測式——物理モデル	
状態式——物理モデル	} 推定問題
観測式——観測条件	
状態式——物理モデル・パラメータ定常条件	} 同定・推定問題
観測式——観測条件	

観測式表現が線形でなく、観測行列 H や観測ベクトル y に未知数($Q(p_i)$)が存在するので、フィルタリングはこの推定パラメータが収束するまで繰り返し行う必要がある。但し、载荷点を観測節点に選べば、観測ベクトルに未知数が現れないので、非線形の度合いは弱まり、フィルタリングが比較的容易となる。

また、観測節点数は未知数の個数以上でなければならないが、観測節点数だけ次元を有する行列方程式を毎回解くので、数値計算の効率の観点からはできるだけ次元は低いほうがよい。逆に観測節点数は多いほうが同定の精度を確かなものとする。

3. 数値計算

前節で述べた定式化に基づいて

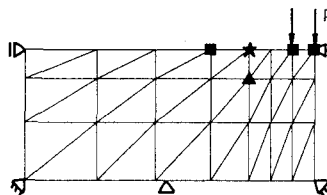


図-1 均質領域に関する有限要素モデル

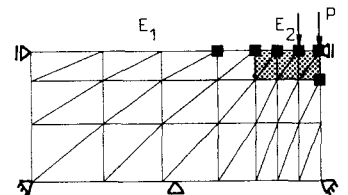


図-2 非均質領域に関する有限要素モデル

数値計算を行う。まず、次の二つの仮定をおく：①観測条件として、“順解析”による節点変位を与える、②誤差は観測誤差のみを考慮するが、変位は確定した値をとるものと考えて、観測誤差としては小さな値を与える。

解析モデルは図-1あるいは図-2に示すものであり、Giodaら^{2), 3)}による一連の逆解析 (Inverse & Direct Back Analysis) との比較を行うために、彼らの使用したのとはほぼ同じ要素構成をとっている。図-1は均質な領域においてLaméの定数を求めるための要素であり、図-2は非均質な領域（二領域）における弾性係数を求めるための要素である。

なお、図中黒い四角は鉛直変位を、黒い三角は水平変位を、星は水平

・鉛直両方の変位を観測する節点である。図-1について $E=10,000 \text{ tf/m}^2$, $\nu=0.333$, 図-2について $E_1=10,000 \text{ tf/m}^2$, $E_2=7,000 \text{ tf/m}^2$, $\nu=0.333$ を真値として計算した変位を観測値として与えた。両ケースにおいて観測変位数は6であり、解析に必要な初期値は以下のものである： $R=0.001$, $U(I, I)=1.0 \times 10^7$

図-4は図-1に対応したLaméの定数の推定経過であり、図-3は同様のケースに関するGiodaらの結果である。また、図-5は図-2に対応した弾性係数 (E_1 , E_2) の推定経過である。前者の場合の方は未知数の初期値に殆ど左右されないが、後者は未知数の初期値によって収束に至る速度が異なる。ただし、いずれの場合でも収束した値はほぼ一意である。

結果として次の諸点を示すことができる：

- 1) Laméの定数が推定できれば、弾性係数とポアソン比を逆算することができる。また、この方法は段階荷重や非線形弾性問題にたいして区間線形等価弾性係数を与える。
- 2) Kalmanフィルタリングによるパラメータ推定は、InverseあるいはDirect Back Analysisに比べて推定値の立上がりが速い。
- 3) 観測節点数が減少すると、同定の精度や収束速度は低下する。同定の可否は観測位置やその成分よりも観測変位の数に大きく影響を受ける。
- 4) 観測に誤差が混入すると考えられる時、その節点に対応する誤差共分散値を大きくとればよい。

この方法を利用して、地盤あるいはダムの実際の変位データから弾性係数を推定することを行いつつある。間隙水を考慮した連成解析に関しては定式化が若干異なるが、これについては別の機会に報告する。

☆参考文献：1) Cividini, A., Jurina, L., and G. Gioda: Some Aspects of 'Characterization' Problems in Geomechanics, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 18, pp. 487-503, 1981., 2) Gioda, G.: Some Remarks on Back Analysis and Characterization Problems in Geomechanics, Invited Lecture, Proc. of 5th Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech., Nagoya, Vol. 1, pp. 47-61, 1985., 3) Gioda, G.: Indirect Identification of the Average Elastic Characteristics of Rock Masses, Proc. of Int. Conf. on Struc. Found. on Rock, Sydney, 1980.

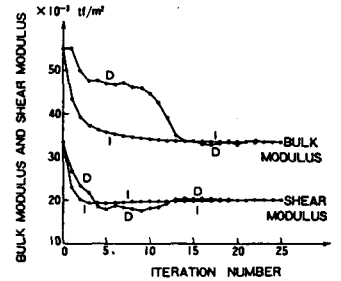


Fig. 3 Variation of shear and bulk moduli during the minimization process. Inverse (I) and direct (D) solution procedures. (after Gioda²⁾)

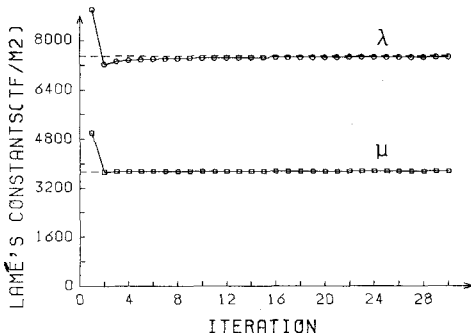


図-4 Laméの定数の推定経過 (図-1)

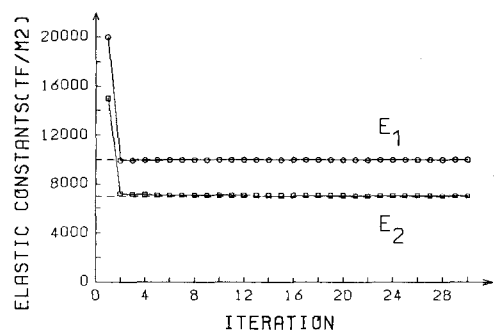


図-5 相異なる弾性係数の推定経過 (図-2)