

III-313 DPに基づく有限要素応力場の潜在すべり面探索について —— 平滑化応力の導入(その2) ——

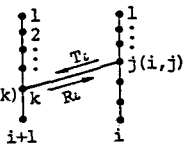
徳島大学 工学部 正 山上 拓男

徳島大学 工学部 正 植田 康宏

中電技術コンサルタント 正 の小山 正之

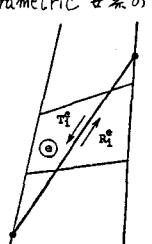
1. まえがき : FEMは土構造物内の応力分布を求める大変強力な手段である。しかし、いくら高精度の応力分布が与えられても、それによ、てただちに構造物全体としての安全率を知ることはできない。このFEMの最大の難点を解消すべく、筆者らは動的計画法(DP)を用いて、与えられた有限要素応力場に潜在する全体安全率最小の曲面(潜在すべり面)とそのときの安全率の値を探索する手法をすでに発表している¹⁾。ただしここでは要素内応力を一定と仮定していた。本報告では新たに有限要素網の節点で平滑化された応力を用い、要素内応力の変化を考慮した方法を提案するとともに具体的問題への適用例を示す。

2. DPに基づく潜在すべり面決定 : 文献1)で述べたように与えられた応力場の任意の2点A,Bを結び任意の曲線ABに沿って全体安全率 F_s を次式で定義する : $F_s = \int_A^B \tau ds / \int_A^B \sigma ds \dots (1)$ ここに τ, σ はそれぞれせん断抵抗力とせん断応力である。このとき新たな変数 G を持ち込んで $G = \int_A^B (\tau - F_s \sigma) ds \dots (2)$ と定義すれば、式(1)の F_s を最小にすることと式(2)の G を最小にすることが、たゞ同等であることが知られている²⁾。求めるA,B2点間の潜在すべり面は F_s を最小とするものである。ところが理論構成上、式(1)を直接最小化することはできないので、これに代わって式(2)の G の最小化を図る。その際、数値解析の便宜上式(2)を離散形で表示する : $G = \sum_{j=1}^n (R_i - F_s T_i) \dots (3)$ さて目下の問題にDPを適用するに当たっては解析領域に適当な数のstage, stateを設置する必要がある(文献1)参照)。いま図-1に示すように任意の引き続く2つのstage $i, i+1$ 上の任意のstate j および k を結ぶ軌道 $\overline{jk}$ を可能なすべり面の一部とみなす。このとき軌道 $\overline{jk}$ 間のせん断力 T_i とせん断強度 R_i をFEMによる応力分布から評価できたとすれば、この2点間の式(3)に寄与する G の変化(return)を $G_i(j, k)$ は、 $\Delta G_i(j, k) = R_i - F_s T_i \dots (4)$ である。このreturnを用いて、最適性原理から 図-1 最適性原理の応用導かれる関数再帰方程式と呼ばれる漸化式を定義し、これを解けば求める潜在すべり面が明らかとなる。



3. 平滑化応力を用いたreturnの計算 : 筆者らはこれまで要素内応力を一定と仮定して上記のreturnを求めてきたが、¹⁾ DP探索の精度を高めるためには要素内応力の変化を考慮した手法を検討すべきである。このためここでは平滑化された節点応力の導入を試みる。ただし桁数の制約上四角形要素を対象とした場合についてのみ説明を行う。いま応力の平滑化によりある四角形要素の4節点(コーナー)の応力密度が与えられているとすると1つの可能性として要素内応力の変化 σ は次の多項式で表される : $\sigma = a + bx + cy + dxy$ (a, b, c, d は定数) $\dots (5)$ しかしながら式(5)では要素の各辺が x 軸もしくは y 軸に平行でなければ要素間で応力の連続性が保たれない。そこで要素内応力の変化を考慮し、かつ要素間で応力の連続性を保つために isoparametric 要素の概念である局所(自然)座標系(ξ, η)を用いて要素内応力を表示する : $\sigma = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i \dots (6)$

ここに、 σ_i = 平滑化により与えられた各節点の任意の応力成分、 N_i = 形状関数で $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ $\dots (7)$ など、と定義されている。さて図-2に示すように任意の要素①の軌道に沿うせん断抵抗力とせん断力をそれぞれ R_i^e と T_i^e で表すと次式を書くことができる : $R_i = \sum R_i^e, T_i = \sum T_i^e \dots (8)$ ここに、 $R_i^e = \int_{\Gamma_{xy}} \tau dl, T_i^e = \int_{\Gamma_{xy}} \sigma dl \dots (9)$ また、 dl = 軌道に沿う微小長さ、点 Γ_{xy}, Π_{xy} は要素境界と軌道の交点を表わしている(図-3参照)。ここで上式の積分に関連した諸量を全体座標系から局所座標系に変換する。図-4はこのための要素①の局所座標系表示であり、点 Γ_1, Γ_2 図-2 return計算



(これらの座標をそれぞれ $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ とする) はそれぞれ点 I_{xg}, I_{xy} に対応している。いま図に示したように点 I, II 間の x 方向, y 方向における距離をそれぞれ $l_{xg}, l_{y\eta}$ で表すと, $dl = dx/\cos\theta$, $dx = l_{xg} d\xi/l_{\xi\eta}$ (θ = 軌道が x 軸の正の方向となす角) なる関係から式(9)を次のように書き換えることができる:

$$R_i^e = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{l_{xg}}{l_{\xi\eta}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} T_x d\xi, \quad T_i^e = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{l_{xg}}{l_{\xi\eta}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} T_y d\xi \quad \dots (10) \quad \text{ここで式(6)を用いて } T_x, T_y \text{ は次のように表される:}$$

$$T_x = C + \tan\phi \cdot \frac{1}{2} N_i \tilde{\epsilon}_i, \quad T_y = \frac{1}{2} N_i \tilde{\epsilon}_i \quad \dots (11)$$

($\tilde{\epsilon}_i, \tilde{\epsilon}_i$ は要素③の4節点における, 目下の軌道に平行な面上の平滑化された垂直応力およびせん断応力)。このとき $\xi-\eta$ 座標系における軌道の式を $\eta = P\xi + q$ と表し式(11)より η を消去すれば式(10)中の N_i をそのみの関数とすることができる。そして最終的に次式が導かれ, 式(8)よりこの場合の return が計算できる。

$$R_i^e = \frac{l_{xg}}{4\cos\theta} \cdot \left(C + \frac{\tan\phi}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 N_i \tilde{\epsilon}_i \right)$$

$$T_i^e = \frac{l_{xg}}{4\cos\theta} \cdot \sum_{i=1}^4 N_i \tilde{\epsilon}_i$$

ここに, $M_i = (1-g) + (-1-p+g) \frac{1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + \frac{p}{2} (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2)$, など。

4. 適用例および結言: 図-5 ~ 8 は文献3) に示した問題1~3 について平滑化応力を用いて解析した結果である。これらの図には比較のため要素内応力を一定と仮定した場合の解析結果も併せて示してある。ただしこ

こでいう平滑化とは, 各節点の応力を, その点に会合するすべての要素の要素中心の応力の算術平均として定義したものである。このように単純な平滑化応力を用いたせいか, 図-8 以外は要素内応力一定の場合と比べ, 臨界すべり面の出現位置, 安全率ともに比較的大きなずれが認められる。換言すればこの解法は応力分布に(当然ではあるが) かなり敏感な方法であるといわねばならない。したがって応力の平滑化に有限要素の大きさを考慮した重み付き平均を導入するなどが今後に残された検討事項であろう。

【参考文献】1) 山上・植田・小山: 第39回土木学会講演概要集 第3部門, pp.157~158, 昭和59年。2) Iu. P. Petrov, : Variational Methods in Optimum Control Theory, Academic Press, pp.144~147, 1968。3) 山上・植田・小山: 第20回土質工学研究発表会講演集, pp.1001~1002, 昭和60年。

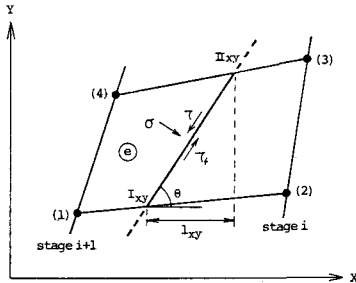


図-3 要素③の全体座標系表示

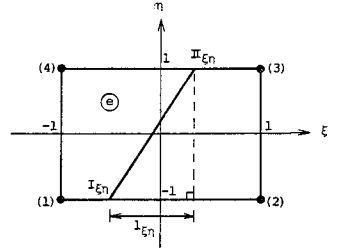


図-4 要素③の局所座標系表示

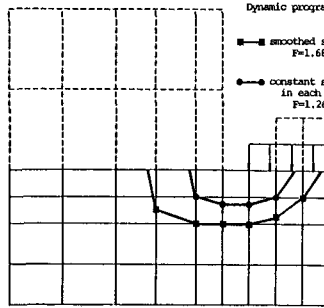


図-5 問題1の探索結果 ($p=6 \text{ t/m}^2$)

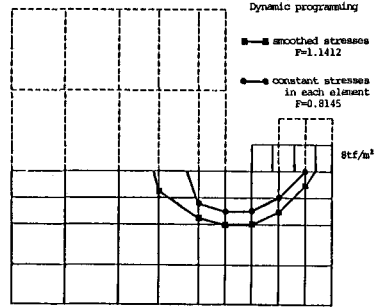


図-6 問題1の探索結果 ($p=8 \text{ t/m}^2$)

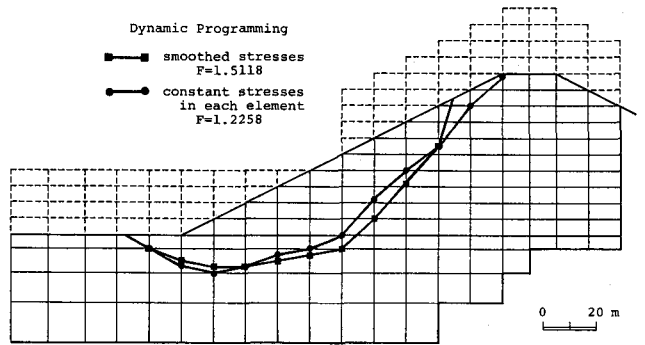


図-7 問題2の探索結果

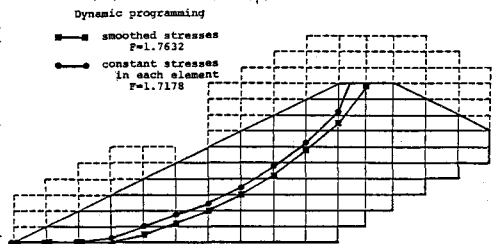


図-8 問題3の探索結果