

## III-278 熱伝導場における変分原理と境界要素法

大成建設㈱ (正) ○ 桑田 尚史  
名古屋大学工学部(正) 市川 康明  
名古屋大学工学部(正) 川本 脩万

1. 序論 構造物の熱応力の問題は、トンネルライニングやコンクリートダム等土木工学の種々の分野で問題となっており、与えられた条件下で温度分布や応力分布を的確に把握して構造物の安全性や耐久性を検討する必要がある。本報告では熱伝導場を拡散方程式を満足する非定常熱伝導場とし以下の検討を行った。

一般に、拡散方程式にエネルギー原理を適用するのは困難である。そこで、合成積を用いて偏微分方程式を時間に関する積分方程式に変換してエネルギー原理を適用する事をしめす。

従来、拡散方程式の解法には、Fourier 変換、Laplace 変換、差分法、有限要素法など様々な解析法が試みられてきたが、本報告では境界要素法による解析を試みた。

2. 非定常熱伝導場における変分原理 非定常熱伝導場の支配方程式は、温度を $\theta$ 、熱拡散率を $k$ 、熱発生項を $h$ とすると次式の様な拡散方程式で表される。

$$k \nabla^2 \theta(x, t) + h(x, t) = \dot{\theta}(x, t) \quad (1)$$

ここで、 $(\dot{\phantom{x}})$  は時間微分を表す。

式(1)は放物型の偏微分方程式であり時間に関する1階の微分項を含むために、そのエネルギー式を導く事は直接的には困難である。そこで、合成積<sup>3)</sup>を用いて時間微分項を除去してエネルギー式を導く。合成積とは、2つの関数 $\theta(x, t)$ 、 $w(x, t)$ が時間 $t$ に関して積分可能であるとすると次式で定義される。

$$[\theta * w](x, t) = \int_0^t \theta(x, t-\tau) w(x, \tau) d\tau = \int_0^t \theta(x, \tau) w(x, t-\tau) d\tau \quad (2)$$

いま、ステップ関数 $H$ と式(1)との合成積を作ると

$$H * k \nabla^2 \theta + H * h = \theta - \theta_0 \quad (3)$$

と表すことが出来る。式(1)と式(3)は等価であり、式(3)では時間に関する微分項が除去されている。式(3)に対する汎関数は次式の様に定義されてる。

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{\Omega} [H * k \nabla^2 \theta * \nabla^2 \theta + \theta * \theta - 2\theta_0 * \theta + 2h * \theta] d\Omega \\ & - 2 \int_{\Gamma_2} [H * \bar{q} * \theta d\Gamma - \int_{\Gamma_3} H * \alpha (\theta - \theta_a)^2 * \theta d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)のEuler方程式が式(3)を与えることは容易に確認できよう。従って式(4)の最小エネルギー原理は

$$\delta \pi = 0$$

と書ける。式(4)を最小にする $\theta$ が式(1)の解を与える。

3. 非定常熱伝導場における境界要素解析 非定常熱伝導場に対する境界要素解析は文献<sup>2)</sup>に詳細に記述されているのでここでは簡単に述べる。式(1)の拡散方程式に対する基本解 $\theta^*$ は

$$\theta^*(y, \tau; x, t) = \frac{1}{4\pi k(\tau-t)} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{4k(\tau-t)}\right] H(\tau-t) \quad (5)$$

である。ここで、 $t$ 及び $\tau$ はそれぞれ内点 $x$ 及び境界上の点 $y$ における時間を表す。

式(5)を仮想変位として式(1)に仮想仕事の原理を適用すると

$$\int_T \int_{\Omega} [k \nabla^2 \theta(x, t) - \dot{\theta}(x, t) + h(x, t)] \theta^*(y, \tau; x, t) d\Omega(x) dt = 0 \quad (6)$$

となり,

式(6)を2回部分積分を施し極限操作を行うと次の境界積分方程式が得られる。

$$c(y) \theta(y, \tau) + \int_T \int_{\Gamma} q^*(y, \tau; y, \tau) \theta(y, \tau) d\Gamma(y) d\tau = \int_T \int_{\Gamma} \theta^*(y, \tau; y, \tau) q(y, \tau) d\Gamma(y) d\tau \\ + \int_T \int_{\Omega} \theta^*(y, \tau; x, \tau) h(x, \tau) d\Omega(x) d\tau + \int_{\Omega} \theta_0(x) \theta^*(y, \tau; x, 0) d\Omega(x) \quad (7)$$

ただし、係数 $C$ は点 $y$ における境界の幾何学形状に依存する定数であり、また $q = -k \partial \theta / \partial n$ ,  $q = -k \partial \theta^* / \partial n$ である。

式(7)の境界積分方程式を数値的に解くために境界 $\Gamma$ 及び領域 $\Omega$ を各要素に分割し時間ステップ( $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ )ごとに計算を繰り返し実行すればよい。

4. 数値計算例 数値計算例として3\*3mの正方形領域の熱伝導問題を取り上げた。ここで、初期条件を30℃,熱拡散率を1.25m/h,境界上では全て0℃に拘束されているとして解析を行った。BEM, FEMの分割図をFig.2に示す。但し、BEMでは時間間隔 $\Delta t = 0.2$ , FEMでは $\Delta t = 0.02$ とした。

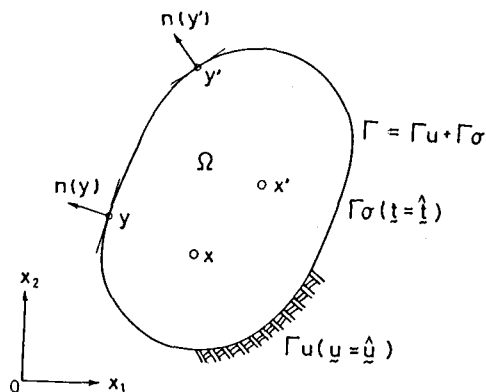


Fig.1 Coordinate system and notation

Table.1の解析結果を見るとFEMはBEMよりも大きな時間ステップを用いても同程度の解が得られ計算時間も短くて済むので経済的であると思われる。

しかし、実際の問題(例えばコンクリート構造物)に対してBEMを適用すると、BEMの基本解の指数関数部の係数が解析に大きな影響を及ぼすため安定した近似解を得ることは困難である。すなわち、熱拡散率のオーダーと対とする領域の大きさによってはBEMは適用出来ないこともあると思われる。

Table.1 Comparing of internal point temperatures at  $t=1.2$  second calculated by FEM, BEM and closed form solutions

| X   | Y   | BEM   | FEM   | 解析解   |
|-----|-----|-------|-------|-------|
| 0.0 | 0.0 | 1.831 | 1.977 | 1.812 |
| 0.3 | 0.0 | 1.743 | 1.910 | 1.723 |
| 0.6 | 0.0 | 1.499 | 1.712 | 1.466 |
| 0.9 | 0.0 | 1.108 | 0.998 | 1.065 |
| 1.2 | 0.0 | 0.605 | 0.494 | 0.560 |
| 0.3 | 0.3 | 1.652 | 1.744 | 1.639 |
| 0.6 | 0.6 | 1.220 | 1.383 | 1.186 |
| 0.9 | 0.9 | 0.661 | 0.669 | 0.626 |
| 1.2 | 1.2 | 0.191 | 0.152 | 0.173 |

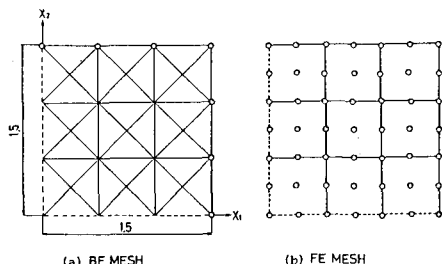


Fig.2 Example of boundary element discretization(a) and finite element discretization(b)

5. 結論 本報告により得られた結論として以下の事が言える。

1. 非定常熱伝導場の支配方程式に合成積を適用することによりエネルギー原理が導入出来ることを示した
2. 非定常熱伝導場にBEMを導入する際には注意する必要があることを示した。

## 6. 参考文献

- 1) Carlson, D.E; Linear Thermoelasticity, Mech. of Solids, Vol. 2(1972), pp297-345
- 2) Pina, H.L.G. and Fernanda, J.L.M; Application in Transient Heat Conduction, Topics in Boundary Element Method(1978), pp42-58
- 3) フィルソフ, B.A(鷲津久一郎, 山本善之, 川井忠彦); 重みつき残差法と変分原理, 培風館(1974)