

前田建設工業株式会社 正会員 鷺沢 栄紀
梨本 裕

1 はじめに

解析領域全体を要素分割しなければならないFEMに対し、境界だけを要素分割すれば良いBEMは問題によってはFEMより高精度の解を簡単に出力できるので、最近注目を集めている。BEMには直接法と間接法の2種類があり、広く利用されているのは直接法だが、応力問題においては間接法の有効性が認められている。そこで、間接法のポテンシャル問題への適用を試みたので、その結果の概要を報告する。

2 解析方法

2.1 問題と解析方針

式(1)~(3)で表わされる2次元定常浸透流問題を解析する(図-1参照)。

$$\partial^2 \phi / \partial X^2 + \partial^2 \phi / \partial Y^2 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$q = -\partial \phi / \partial n = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ϕ : ポテンシャル

n : Γ 上の内向き法線

($-$ は既知量)

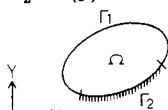


図-1

境界上に単位長さ当たりの強さが σ の“わき出し(source)”を分布させ、このわき出しによって誘起されるポテンシャルが式(4)で表わされるものとする。XとYの関数 $\ln(1/r)$ が式(1)の特解(基本解)なので、式(4)も式(1)の解になる。

$$\phi(P) = \int_{\Gamma} \sigma(Q) \ln(1/r) d\Gamma \quad (4)$$

P: 領域 Ω 内の任意の点 Q: 境界 Γ 上の点

r: 点Pと点Qの距離

従って、式(4)が式(2)、(3)を満足するようにわき出しの強さ σ を決めることができればこの問題は解けたことになり、領域内の任意の点のポテンシャルは式(4)より、流速は式(5)、(6)より計算される。

$$u(P) = -\partial \phi / \partial X \quad (5)$$

$$v(P) = -\partial \phi / \partial Y \quad (6)$$

u, v : 流速のX, Y方向成分

わき出しの強さ σ を決定する方程式は式(4)を式

(2)、(3)に代入して得られるが、点P'が境界 Γ 上にあるとき、 $q(P')$ が式(7)ではなく式(8)で表わされることに注意しなければならない。

$$q(P') = -\int_{\Gamma} \sigma(Q) \partial \ln(1/r) / \partial n d\Gamma \quad (7)$$

$$q(P') = -\int_{\Gamma} \sigma(Q) \partial \ln(1/r) / \partial n d\Gamma + \pi \sigma(P') \quad (8)$$

2.2 離散化とわき出しの強さの決定

境界 Γ を要素分割し、 ϕ と q は各要素内で一定と仮定する。要素の中央点の値で代表させるものとする。すべてのわき出しによって誘起される要素 i の ϕ と q は式(4)、(8)から次のようになる。

$$\phi_i = \sum \sigma_j A_{ij} \quad (9) \quad j: 1 \sim N$$

$$q_i = \pi \sigma_i + \sum \sigma_j B_{ij} \quad (10) \quad N: \text{要素数}$$

ここで(図-2参照)、

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} \ln(1/r) d\Gamma \quad (i \neq j) \\ = \ell \ln(1/r_2) + \ell - (g - \ell/2) \ln(r_2/r_1) - m(\theta_2 - \theta_1)$$

$$A_{ii} = \ell \ln(2/\ell) + \ell$$

$$B_{ij} = -\int_{\Gamma_j} \partial \ln(1/r) / \partial n d\Gamma \quad (i \neq j) \\ = -SS(i)BX_{ij} + CC(i)BY_{ij}$$

$$BX_{ij} = -\int_{\Gamma_j} \partial \ln(1/r) / \partial X d\Gamma \\ = \{X_i - X_j + CC(j)g\}(\theta_2 - \theta_1)/m - CC(j) \ln(r_2/r_1)$$

$$BY_{ij} = \{Y_i - Y_j + SS(j)g\}(\theta_2 - \theta_1)/m - SS(j) \ln(r_2/r_1)$$

$$BX_{ii} = BY_{ii} = B_{ii} = 0$$

ただし、 $m=0$ のときは(要素 i, j が同一直線上)
($\theta_2 - \theta_1$)/ $m \rightarrow \ell/(g^2 - \ell^2/4)$, $B_{ii} = 0$

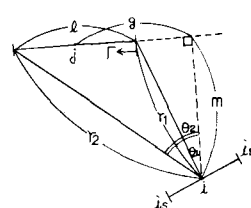


図-2

式(9)、(10)が境界条件を満足するように σ を決定するとき、つり合い条件を導入する必要がある。というのは、式(9)で与えられる ϕ は相対的な値に過ぎないからである。これは無限遠で ϕ が0にならないことによる。

従って、実際には式(9)を式(9')に改め、式(11)

を追加して解くことになる。

$$\phi_i = \sum \sigma_j A_{ij} + C \quad \dots (9')$$

$$\sum \sigma_j l_j = 0 \quad \dots (11)$$

2. 3 未知の境界値と内点値の算出

既に決定した σ , C を用いて、未知の境界値は式(9'), (10)より、内点値は式(12)~(14)より計算される。

$$\phi(P) = \sum \sigma_j A_{Pj} + C \quad \dots (12)$$

$$u(P) = \sum \sigma_j B_{Pj} \quad \dots (13)$$

$$v(P) = \sum \sigma_j B_{Pj} \quad \dots (14)$$

A_{Pj}, B_{Pj}, C_{Pj} は2. 2と同じ手順で求める。

2. 4 特異性が生じる場合の処理

σ を決定するとき、あるいは未知の境界値を算出するときに用いる係数には $\ln(1/r)$, $1/r^2$ などの積分が含まれ、これらの特異性が解の精度に大きな影響を及ぼすことも予想される。その場合の処理として境界 Γ の外側に設けた補助境界 Γ^* (Γ と Γ^* の距離を δ とする)上にわき出しを分布させ、これによって誘起される Γ 上の ϕ , q が境界条件を満足するようにわき出しの強さ σ を決定する手法を用いる。

3 解析例

3. 1 一方向流れの問題

精度が確かめられるように、理論解が存在する問題を解いた(図-3)。各数値解法による境界値を比較したのが図-4、内点値を比較したのが図-5である。間接法による解の精度は $\delta=0$ のとき隅角部付近で非常に悪いが、 $\delta=1$ とすると直接法のそれよりはるかに良くなる。

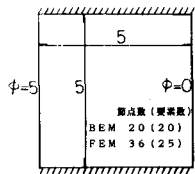


図-3 モデル1

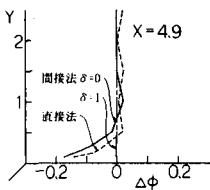


図-5 $\Delta \phi (\Omega)$

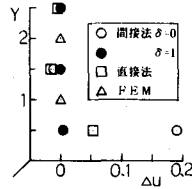


図-4 $\Delta u (\Gamma)$

$$\Delta u = u - u'$$

$$\Delta \phi = \phi - \phi'$$

$$u, \phi : \text{理論解}$$

$$u', \phi' : \text{数値解}$$

間接法による解の精度は

δ を変化させると図-6に示すように変化する($X=5$, $Y=0.5$ における Δu)。

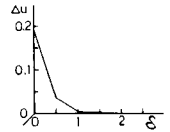


図-6 δ と解の精度

3. 2 その他

図-7, 8に示す問題において各数値解法による解を比較したのが表-1である。どちらの問題においても間接法による解は $\delta=1$ とすると他の解に近づく。

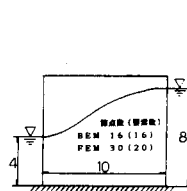


図-7 モデル2

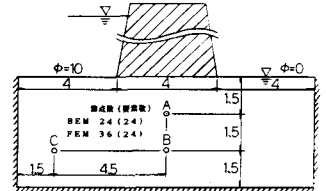


図-8 モデル3

表-1 各数値解の比較

		モデル2					3
		T	u(A)	u(B)	u(C)	v(C)	
BEM	<間> $\delta=0$	5.41	1.23	0.97	0.27	-0.32	2.59
	$\delta=1$	4.96	1.23	0.98	0.29	-0.30	2.27
	直接法	5.12	1.24	0.98	0.30	-0.30	2.36
FEM		5.13	1.28	0.94	0.34	-0.33	2.23

ここで、Tは境界値から求めた流量である。

4. おわりに

間接法では積分の核に含まれる項の特異性が解の精度に大きな影響を及ぼすことが確認された。この影響は境界 Γ の外側に補助境界 Γ^* を設け、この上にわき出しを分布させれば小さくすることが可能で、 Γ と Γ^* の距離を要素の代表的な長さと等しくするのが良いようである。この手法によって間接法の応用分野が広がるものと思われる。

<参考文献>

- 1) 原: BIE法によるPoisson方程式の数値解析, 第11回マトリックス解析法研究発表論文集
- 2) 丹羽他: 積分方程式による任意形状, 多数空洞周辺応力の解析, 土木学会論文報告集, 195号
- 3) Brebbia: 境界要素法入門(培風館)その他
- 4) 西谷: 電子計算機による2次元応力問題の解法, 日本機械学会誌, 第70巻, 第580号
- 5) 梨本: BEM <間接法>による掘削解析, 第18回岩盤力学シンポジウム