III-184　楕円形要素のＤＥＭ解析に関する検討

鳥取大学大学院　学生員　○川崎　了
鳥取大学工学部　正　員　木山　英郎
鳥取大学工学部　正　員　藤村　尚
鳥取大学工学部　正　員　西村　強

１．はじめに

本研究は、離散剛要素法（ Distinct Element Method, 以下ＤＥＭと略す ）による粒状体の変形・流動解析に、新たに楕円形要素を導入するための基礎的な検討を行なうものである。ここでは、楕円形要素の接触判定法の基礎式を誘導するとともに、簡単な数値解析例を報告する。

２．接触判定法の概要

次のような２次曲線式 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ で表わされる２つの楕円形要素が接触している場合、２次曲線束 $f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)=0$ は２要素の交点を通るすべての２次曲線を表わす。そこで、この２次曲線束が２直線となる定数λの値を求め、２直線が２要素の共通交点を通るときを接触しているものと判定するのである。以下に、その概要を述べる。

１）　２次曲線の分類

平面上の直交座標系において、次の２次方程式

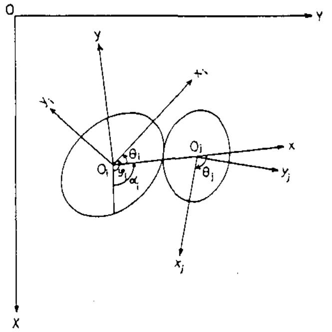
$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

が表わす図形は２次曲線といわれており、以下の３式

$$D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \quad (2), \qquad D_0=\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\sigma=a+b \qquad (4)$$

により、一般に表－１のように分類することができる。



図－１　全体座標系と局所座標系

２）　基礎式の誘導

図－１に示すような、２つの楕円形要素ｉ，ｊ間の接触について考える。まず要素ｉ，ｊを、各要素の重心O_i,O_jを原点とする局所座標系(x_i, y_i),(x_j, y_j)によって表わす。次に局所座標系（ｘ，ｙ）を、要素ｉの重心O_iを原点とし、ｘ軸が要素ｊの重心O_jを通るように設定する。そしてこのｘ軸が、全体座標系（Ｘ，Ｙ）のＸ軸となす角をα_i,要素ｉの局所座標系のx_i軸となす角をθ_i,要素ｊの局所座標系のx_j軸となす角をθ_jとする。また、重心間距離$\overline{O_iO_j}=d$とおく。

さて、局所座標系（ｘ，ｙ）を用いて要素ｉ，ｊを表わしたものを次式に示す。

$$A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2=D_i \quad (5), \qquad A_j(x-d)^2+2B_j(x-d)y+C_jy^2=D_j \quad (6)$$

ここに、
$$\left.\begin{aligned} &A_n=b_n^2\cos^2\theta_n+a_n^2\sin^2\theta_n, \quad B_n=(b_n^2-a_n^2)\cos\theta_n\sin\theta_n, \\ &C_n=b_n^2\sin^2\theta_n+a_n^2\cos^2\theta_n, \quad D_n=a_n^2b_n^2 \qquad (n=i,j) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

要素ｉ，ｊの交点を求めるため、式（５），（６）に任意定数λを用いて２次曲線束を作る。

$$A_ix^2+2B_ixy+C_iy^2-D_i+\lambda\{A_j(x-d)^2+2B_j(x-d)y+C_jy^2-D_j\}=0 \qquad (8)$$

そして、式（８）を２次曲線の一般形である式（１）の形式に変換する。

$$\left.\begin{aligned} &ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \\ &\text{ここに、}\ a=\lambda A_j+A_i,\ h=\lambda B_j+B_i,\ b=\lambda C_j+C_i,\ g=-\lambda A_jd, \\ &f=-\lambda B_jd,\ c=\lambda A_jd^2-\lambda D_j-D_i \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

式（９）が２つの１次式の積に因数分解する、つまり２直線となるには、式（２）において、$D(\lambda)=0$を

満足するλを求めてやればよい。式（9）を、独立変数としてのλの式に整理して次の簡略式を得る。

$$D(\lambda)=t_1\lambda^3+t_2\lambda^2+t_3\lambda+t_4 \qquad (10)$$

上式より求めた実根のλの1つを式（9）に代入し、式（9）を因数分解して得られる2直線と、式（5），（6）との共通交点の存在について調べる。

以上が、楕円形要素の接触判定法の概要である。

3．数値解析例

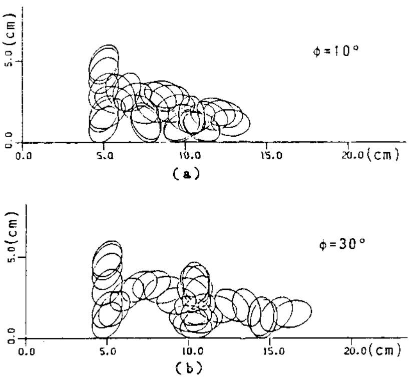
まず、1要素の落下・反発運動を、図－2と図－3に示す。図－2の（a）と（b）は、底壁面の摩擦係数が異なる場合を示したものであり、楕円形要素の落下・反発運動において示す挙動が摩擦係数によって異なることがわかる。また、図－3は要素形状の異なる3つの要素に水平方向の初速度を与えた場合の、落下・反発運動による挙動を示す。同図より、接触点（頂点）の連続～不連続性、および接触点（頂点）と要素の重心との位置関係の相違によって運動特性が支配され、楕円形要素が円形要素と長方形要素の中間的な挙動を示すことがわかる。

次に、本手法による多数要素への適用の一歩として、3要素の接触開始から静止するまでを解析した結果を図－4に示す。解析に使用した材料定数は、剛性定数 $K_n/\rho g=K_s/\rho g=36400$cm，粘性定数 $\eta_n/\rho g=\eta_s/\rho g=25.925$cm/s，$\Delta t=10^{-5}$s である。静止までの繰返し数 891回と極めて多いのが難点である。なお、静止の判定は、Δt間の変位増分の絶対値 $|\Delta u_i|,|\Delta v_i|,|\Delta w_i|$ について3要素の平均値が 10^{-10} 以下になることを条件とした。

当初、$\Delta t=10^{-4}$s による解析を試みたが、$|\Delta u_i|,|\Delta v_i|$ がすみやかに減少するにもかかわらず、$|\Delta w_i|$ が不規則な周期変動を示し静止に至らなかった。Δtへの配慮も重要であるといえる。

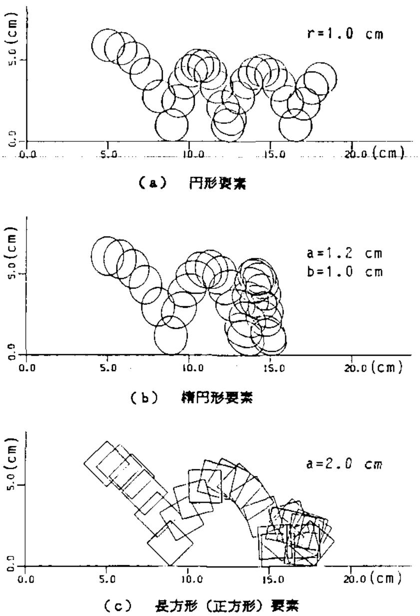
4．おわりに

楕円形要素がＤＥＭ解析において円形要素と多角形要素との中継的役割を果たすことが期待できるが、計算が煩雑であり、かつ収束性も悪いので、多数要素への適用にはさらに工夫が必要である。



（a）
（b）

図－2　要素の落下・反発（$a/b=1.5$）



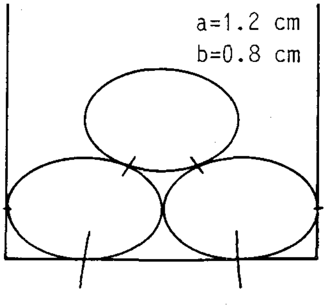
（a）　円形要素
（b）　楕円形要素
（c）　長方形（正方形）要素

図－3　3種類の要素の落下・反発

表－1　2次曲線の分類

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$D_0\neq0$</td><td colspan="3">$D_0=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$D\neq0$</td><td rowspan="2">$D_0<0$</td><td colspan="2">$D_0>0$</td><td colspan="3" rowspan="3">放　物　線</td></tr>
<tr><td>$\sigma D<0$</td><td>$\sigma D>0$</td></tr>
<tr><td>双曲線</td><td>楕円</td><td>空集合
2本の虚直線
（点楕円）</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$D=0$</td><td rowspan="3">相交わる
2直線</td><td colspan="2" rowspan="3">1点
相交わる2虚直線
または点楕円</td><td colspan="2">g^2-ac, f^2-bc のうち、少なくとも1つが</td><td rowspan="2">$g^2-ac=f^2-bc=0$</td></tr>
<tr><td>正</td><td>負</td></tr>
<tr><td>平行2直線</td><td>空集合
（虚平行直線）</td><td>1直線
（2直線一致）</td></tr>
</table>

※　ここに、g^2-ac, f^2-bc は同符号であるか、または0である。



図－4　3要素の静止