III-183　逆解析による岩質材料の弾塑性特性の同定について

名古屋市　（正）○井田　宏正
名古屋大学工学部（正）　京谷　孝史
名古屋大学工学部（正）　市川　康明
名古屋大学工学部（正）　川本　朓万

1．はじめに　一般に地盤（岩質）材料の構成則は，室内一軸・三軸圧縮試験の結果を応力場・変位場が均質である要素試験とみなして決定されている。これは要素試験においては大域的な力および変形が局所的なそれらと一致し，構成式のパラメータの同定が著しく簡約化できるからである。しかしながら，現実の問題としてどのような試験も固有の境界条件を持ち，均質な応力場・変形場となる要素試験でないことは明らかであり，局所的に定義された構成則を大域的な測定結果より決定することは本質的な矛盾を含む。これらの問題を解決するために，供試体の不均質変形などの境界上の応答を測定し，逆解析の概念の導入による構成式の同定を行った。その際，構成則におけるグローバルな関数形は仮定せず，有限要素を用いた離散化手法を構成則に導入した。以下，式はすべて増分形で書くこととする。

2．一般化逆解析手法　最適な構成則を求める逆解析を，構成則（構成テンソル$\underset{\sim}{\Psi}$）を変動させ，かつ順解析の境界条件に双対な観測値を制御する問題として考えてみることとする。

つり合い式 $\underset{\sim}{\nabla}\cdot d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{0}$　　in $\partial\Omega$

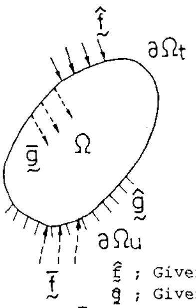
構成則　$d\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\Psi}(\underset{\sim}{p})d\underset{\sim}{\varepsilon}$　　（$\underset{\sim}{P}$：構成テンソルのパラメータ）

順境界条件 $d\underset{\sim}{u} = \hat{\underset{\sim}{g}}$　　on $\partial\Omega_u$

$d\underset{\sim}{t} = \hat{\underset{\sim}{f}}$　　on $\partial\Omega_t$

制御（観測）境界条件　$d\underset{\sim}{t} = \bar{\underset{\sim}{f}}$　　on $\partial\Omega_u$

$d\underset{\sim}{u} = \bar{\underset{\sim}{g}}$　　on $\partial\Omega_t$



$\hat{\underset{\sim}{f}}$; Given Load
$\hat{\underset{\sim}{g}}$; Given Displacement
$\bar{\underset{\sim}{f}}$; Observed Load
$\bar{\underset{\sim}{g}}$; Observed Displacement

Fig.1 System for Back Analysis

Hu－Washizu の原理[1]などを参考にして仮想仕事の原理で書くとペナルテー$\varepsilon_1, \varepsilon_2(0 < \varepsilon_1 \ll 1,\ 0 < \varepsilon_2 \ll 1)$を用いて次式となる。

$$\int_\Omega d\underset{\sim}{\sigma}(\delta\underset{\sim}{\varepsilon})dV - \frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\partial\Omega_t}(d\underset{\sim}{t}-\hat{\underset{\sim}{f}})\delta(d\underset{\sim}{t})dS - \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\partial\Omega_u}(d\underset{\sim}{u}-\hat{\underset{\sim}{g}})\delta(d\underset{\sim}{u})dS$$
$$+\int_{\partial\Omega_t}(d\underset{\sim}{u}-\bar{\underset{\sim}{g}})\delta(d\underset{\sim}{t})dS + \int_{\partial\Omega_u}(d\underset{\sim}{t}-\bar{\underset{\sim}{f}})\delta(d\underset{\sim}{u})dS = 0 \qquad \text{(A)}$$

上式において領域および境界に有限要素近似を導入すると，２つの離散化式が求まる。

$$\underset{\sim}{K}_1 d\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}_1 d\underset{\sim}{T} = d\underset{\sim}{F}_1$$

$$\underset{\sim}{K}_1 = \int_\Omega \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{\Psi}\underset{\sim}{B}dV - \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\partial\Omega_u}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{N}}dS\ ,\quad \underset{\sim}{H}_1 = \int_{\partial\Omega_u}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{N}}dS\ ,\quad d\underset{\sim}{F}_1 = -\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{\partial\Omega_u}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{g}}\,dS + \int_{\partial\Omega_u}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\bar{\underset{\sim}{f}}\,dS$$

$$\underset{\sim}{K}_2 d\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}_2 d\underset{\sim}{T} = d\underset{\sim}{F}_2$$

$$\underset{\sim}{K}_2 = \int_{\partial\Omega_t}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{N}}\,dS\ ,\quad \underset{\sim}{H}_2 = -\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\partial\Omega_t}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{N}}\,dS\ ,\quad d\underset{\sim}{F}_2 = -\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{\partial\Omega_t}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\hat{\underset{\sim}{f}}\,dS + \int_{\partial\Omega_t}\hat{\underset{\sim}{N}}^T\bar{\underset{\sim}{g}}\,dS$$

ただし，$\underset{\sim}{N}$は領域に対する形状関数，$\hat{\underset{\sim}{N}}$は境界上の形状関数（$\hat{\underset{\sim}{N}} = \underset{\sim}{N}|_{\partial\Omega}$）である。さらに構成テンソルのパラメータ$\underset{\sim}{P}$が変動することを考えると

$$\underset{\sim}{K}_1 d\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{K}_1\,\delta(d\underset{\sim}{U}) + \frac{\partial\underset{\sim}{K}_1}{\partial\underset{\sim}{P}}\delta\underset{\sim}{P}\ d\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{H}_1 d\underset{\sim}{T} = d\underset{\sim}{F}_1 \qquad \text{(B)}$$
$$\underset{\sim}{K}_2 d\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{K}_2\,\delta(d\underset{\sim}{U}) + \underset{\sim}{H}_2 d\underset{\sim}{U} = d\underset{\sim}{F}_2$$

となり，これが順境界条件の下でつり合い式と観測境界条件を最適に満たす構成テンソル$\underset{\sim}{\Psi}$を求める制御問題の基礎式である。

3．ダイレタンシー関数を用いた非関連塑性流れ理論　ダイレタンシー特性を有する岩質材料に対して京谷ら[2]により以下のモデルが提案されている。

等方ひずみ硬化を仮定した Drucker－Prager型降伏関数

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}^p)=\alpha\bar{\sigma}+S-K(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$$ K；硬化関数

Pragerの適合条件 $$df=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}d\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial f}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p=0$$

流れ則 $$d\boldsymbol{\varepsilon}^p=\lambda\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$ g；ポテンシャル関数

ダイレタンシー関数 $$\beta=\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{de^p}$$

ただし，α；初期降伏面の傾き，$\bar{\sigma}$；体積応力の大きさ$(=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma})$，S；偏差応力の大きさ$(=(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S})^{\frac{1}{2}})$，$\boldsymbol{\varepsilon}^p$；塑性ひずみテンソル，$\bar{\varepsilon}^p$；体積塑性ひずみの大きさ，$e^p$；偏差塑性ひずみの大きさ

以上より弾塑性構成式は次式となる。

$$d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}^{ep}d\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\boldsymbol{D}^e-\frac{\{\boldsymbol{D}^e(\boldsymbol{m}+\beta\boldsymbol{n})\}\otimes\{\boldsymbol{D}^e(\boldsymbol{m}+\alpha\boldsymbol{n})\}}{h'+(\boldsymbol{m}+\alpha\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{D}^e(\boldsymbol{m}+\beta\boldsymbol{n})}\right]d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{C}$$

硬化係数は$h'=\frac{\partial K}{\partial e^p}+\beta\frac{\partial K}{\partial\bar{\varepsilon}^p}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$は$\boldsymbol{n}=\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{\sigma}}$，$\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{S}}{S}$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$である。$\alpha$と$\beta$を既知とする硬化関数Kが未知関数となり，これを逆解析により同定する。

4．硬化関数の離散化と逆解析の定式化

一軸・三軸圧縮試験において拘束圧によりほぼβが一定であるという報告がされている[3]。そのとき$\boldsymbol{\varepsilon}^p$の方向は常に一定となり，$\varepsilon^p$の空間において一次元の補間関数を用いて有限要素近似を行い，その近似に用いる節点値K_iを同定することにより硬化関数Kが求まる。

硬化関数の離散化 $K(\boldsymbol{\varepsilon}^p)=\Sigma K_i\Phi_i(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ 　Φ_i；補間関数

離散化された硬化関数を用いた増分形のつり合い式（剛性方程式）は次式となる。

$$\Delta\boldsymbol{F}=\sum_e\int_{ve}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}(K_i)\boldsymbol{B}\,dV\,\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}(K_i)\Delta\boldsymbol{u} \tag{D}$$

また，測定変位を表す式は次式となる。

$$\boldsymbol{g}(\Delta\boldsymbol{u})=\Delta\boldsymbol{d} \tag{E}$$

$\Delta\boldsymbol{d}$は測定データ，$\boldsymbol{g}$は測定データに対応する変位をセレクトする関数である。(D),(E) をテーラー展開し（Newton-Raphson法），さらに最小二乗法を適用すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{K}+\left(\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{u})}\right)^T\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{u})} & \boldsymbol{K}^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\boldsymbol{P}}\Delta\boldsymbol{u}\right)\\ \left(\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\boldsymbol{P}}\Delta\boldsymbol{u}\right)^T\boldsymbol{K} & \left(\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\boldsymbol{P}}\Delta\boldsymbol{u}\right)^T\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\boldsymbol{P}}\Delta\boldsymbol{u}\right)\end{bmatrix}_i\begin{Bmatrix}\Delta(\Delta\boldsymbol{u})\\ \Delta\boldsymbol{P}\end{Bmatrix}_i=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{K}^T(\Delta\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{u})+\left(\frac{\partial g}{\partial(\Delta\boldsymbol{u})}\right)^T(\Delta\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}(\Delta\boldsymbol{u}))\\ \left(\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\boldsymbol{P}}\Delta\boldsymbol{u}\right)^T(\Delta\boldsymbol{F}-\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{u})\end{Bmatrix}_i \tag{F}$$

(F) に初期値を与えて繰り返し計算を行うことによりK_iを求め，増分荷重に対するステップごとにそれを行うことによりすべてK_i，つまり硬化関数Kを求める。

5．おわりに

ペナルテーを用いた仮想仕事の原理より一般化逆解析手法を定式化し，構成式と構造系の両方に有限要素を導入する二段階有限要素法(Two Rank FEM）を用いた同定を行った。以上より逆解析手法による構成式の同定作業は実験システムの一部として位置づけられた。

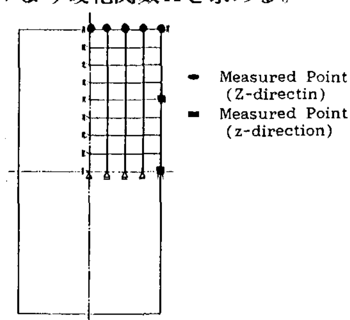


Fig.2 Finite Element Mesh of Axi-Symmetry Model

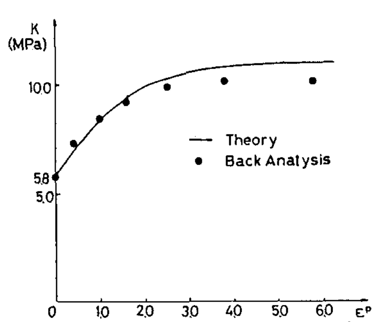


Fig.3 Hardening Function by Theory & Back Analysis

参考文献

(1) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，培風館(1972)，

(2) 京谷孝史，尾原祐三，市川康明，川本朓万：ダイレタンシー係数を用いた非関連流れ則による弾塑性構成則，第38回土木学会年次学術講演会概要集第 3部（1983），

(3) 安田好伸：ダイレタンシー関数を用いた塑性流れ理論とその大谷石への適用，名古屋大学修士論文(1984)