III-181　三軸応力下における岩質材料の増分弾塑性構成則

○東急建設(株)　正会員　満尾　淳
名古屋大学　正会員　市川康明
名古屋大学　正会員　川本眺万

1．まえがき

地盤材料が残留変形を伴う非線形挙動を呈することはよく知られているが、繰り返し載荷試験を行うと、残留ひずみは載荷の初期から生じはじめ、さらに弾性ひずみと応力の関係も非線形となることがわかる。本研究では市川により提案されたベクトル型降伏関数を用いた増分弾塑性理論に基いて、非線形弾性を仮定した構成則を誘導する。またこの構成則を緑色凝灰岩である船入石に適用し三軸繰り返し載荷試験から実際に構成則を決定する。

2．増分弾塑性構成則

従来の流れ則を仮定した弾塑性理論では、降伏関数をスカラー関数として導入するため、せん断塑性変形と体積塑性変形を独立に表現することができない。このような矛盾を回避するためには偏差応力Sと体積応力$\bar{\sigma}$の各々に対して応答関数を定め、その増分形として構成則を定めればよい。また弾性応答についても非線形性を表現するため塑性応答と同様の手法で構成則を定めなければならない。したがって応答関数として次の４つの関数を決定する必要がある。

$$S=\Phi^{e}(e^{e},\bar{\epsilon}^{e}),\qquad S=\Phi^{p}(e^{p},\bar{\epsilon}^{p}) \qquad (1)$$
$$\bar{\sigma}=\Psi^{e}(e^{e},\bar{\epsilon}^{e}),\qquad \bar{\sigma}=\Psi^{p}(e^{p},\bar{\epsilon}^{p})$$

ただし、$e^{e}=(\underset{\sim}{e}^{e}\cdot\underset{\sim}{e}^{e})^{1/2}$、$\bar{\epsilon}^{e}=1/\sqrt{3}\,\mathrm{tr}(\underset{\sim}{\epsilon}^{e})$、$e^{p}=(\underset{\sim}{e}^{p}\cdot\underset{\sim}{e}^{p})^{1/2}$、$\bar{\epsilon}^{p}=1/\sqrt{3}\,\mathrm{tr}(\underset{\sim}{\epsilon}^{p})$、$\underset{\sim}{\epsilon}$；ひずみ、$\underset{\sim}{e}$；偏差ひずみ、上添字は^{e}が弾性、^{p}が塑性を表わす。

式(1) の増分をとることにより、弾性応答は、

$$\begin{Bmatrix} ds \\ d\bar{\sigma} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial\Phi^{e}/\partial e^{e} & \partial\Phi^{e}/\partial\bar{\epsilon}^{e} \\ \partial\Psi^{e}/\partial e^{e} & \partial\Psi^{e}/\partial\bar{\epsilon}^{e} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} de^{e} \\ d\bar{\epsilon}^{e} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1^{e} & G_2^{e} \\ K_2^{e} & K_1^{e} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} de^{e} \\ d\bar{\epsilon}^{e} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

となる。この逆関数を求めると、

$$\begin{Bmatrix} de^{e} \\ d\bar{\epsilon}^{e} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/g_s & \lambda/g_s \\ \alpha/g_v & 1/g_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} ds \\ d\bar{\sigma} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$g_s=G_1^{e}+\lambda K_2^{e},\quad \lambda=-G_2^{e}/K_1^{e}$$
$$g_v=K_1^{e}+\alpha G_2^{e},\quad \alpha=-K_2^{e}/G_1^{e}$$

となり、$d\underset{\sim}{e}^{e}$と$d\underset{\sim}{s}$, $d\underset{\sim}{\bar{\epsilon}}^{e}$と$d\underset{\sim}{\bar{\sigma}}$の共軸性を仮定すると、

$$\underset{\sim}{m}=\underset{\sim}{s}/|\underset{\sim}{s}|,\qquad \underset{\sim}{n}=\underset{\sim}{\bar{\sigma}}/|\underset{\sim}{\bar{\sigma}}| \qquad (4)$$
$$\underset{\sim}{m}^{*}=d\underset{\sim}{s}/|d\underset{\sim}{s}|,\quad \underset{\sim}{n}^{*}=d\underset{\sim}{\bar{\sigma}}/|d\underset{\sim}{\bar{\sigma}}|$$

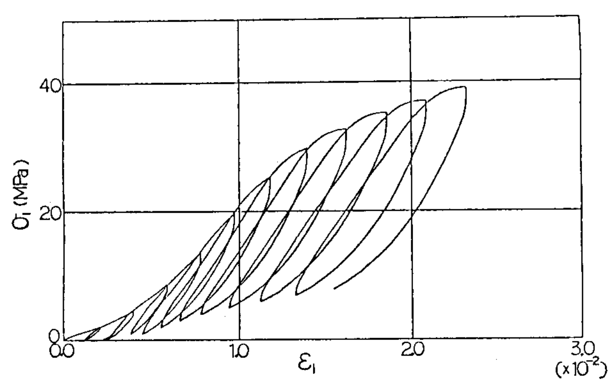
を導入することにより増分弾性応答は、

$$d\underset{\sim}{\epsilon}^{e}=\underset{\sim}{C}^{e}\,d\underset{\sim}{\sigma} \qquad (5)$$

$$\underset{\sim}{C}^{e}=1/g_s\,\underset{\sim}{m}^{*}\otimes(\underset{\sim}{m}+\lambda\underset{\sim}{n})+1/g_v\,\underset{\sim}{n}^{*}\otimes(\alpha\underset{\sim}{m}+\underset{\sim}{n})$$

と求まる。

同様に増分塑性応答は、式(1) の増分をとると



図．1　繰り返し載荷試験

$$\begin{Bmatrix} d\,s \\ d\,\bar{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\Phi^p/\partial e^p & \partial\Phi^p/\partial\bar{\epsilon}^p \\ \partial\Psi^p/\partial e^p & \partial\Psi^p/\partial\bar{\epsilon}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\,e^p \\ d\,\bar{\epsilon}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^p & G_2^p \\ K_2^p & K_1^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\,e^p \\ d\,\bar{\epsilon}^p \end{Bmatrix} \quad (6)$$

となるので、この逆関係から

$$d\,\underset{\sim}{\epsilon}^p = \underset{\sim}{C}^p\, d\,\underset{\sim}{\sigma} \quad (7)$$

$$\underset{\sim}{C}^p = 1/h_s\, \underset{\sim}{m} \otimes (\underset{\sim}{m} + \mu\,\underset{\sim}{n}) + 1/h_v\, \underset{\sim}{n} \otimes (\beta\,\underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{n})$$

$$h_s = G_1^p + \mu K_2^p\ ,\quad \mu = -G_2^p / K_1^p$$

$$h_v = K_1^p + \beta G_2^p\ ,\quad \beta = -K_2^p / G_1^p$$

と求まる。したがって増分弾塑性応答は式(5)、(7) を用いて

$$d\,\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}^{ep}\, d\,\underset{\sim}{\epsilon} \quad (8)$$

$$\underset{\sim}{D}^{ep} = (\underset{\sim}{C}^e + \underset{\sim}{C}^p)^{-1}$$

と求まる。

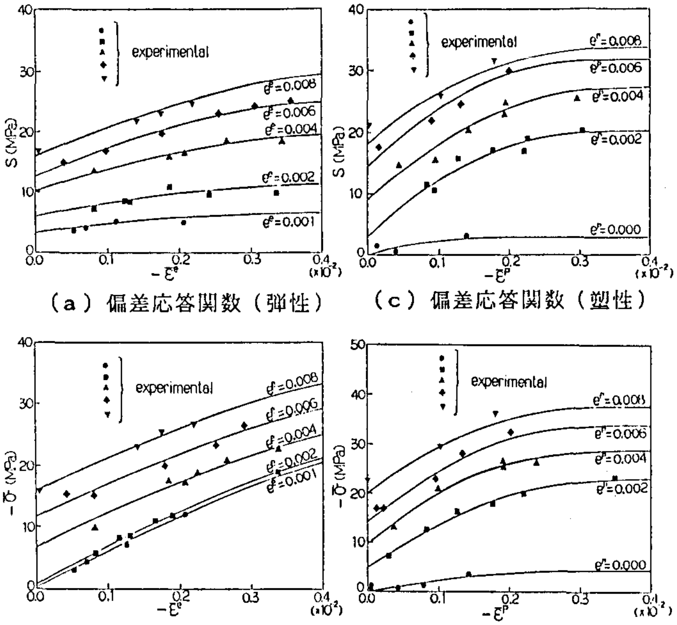
3．三軸繰り返し載荷試験

3．1　実験方法

供試体は緑色凝灰岩である船入石を用いた。載荷方法は図．1に示すように載荷の初期から繰り返しを開始し、以後定ひずみ間隔で載荷、除荷を行った。なお、供試体によるデータのばらつきを抑えるため、繰り返し回数の増加に伴って側圧も増加させた。

3．2　応答関数の決定

応答関数は e^e、ϵ^e、e^p、ϵ^p に関して単調な関数であることが知られているので、



（a）偏差応答関数（弾性）　（c）偏差応答関数（塑性）

（b）体積応答関数（弾性）　（d）体積応答関数（塑性）

図．2　弾性および塑性応答関数

弾性、塑性応答関数ともにラプラス変換を用いて離散形で次のように書かれる。

$$S = a_1(1-\exp(-e/\tau_1)) + a_2(1-\exp(-\bar{\epsilon}/\omega_1)) + a_3(1-\exp(-e/\tau_1))(1-\exp(-\bar{\epsilon}/\omega_1)) \quad (9)$$

$$\bar{\sigma} = b_1(1-\exp(-\bar{\epsilon}/\omega_2)) + b_2(1-\exp(-e/\tau_2)) + b_3(1-\exp(-\bar{\epsilon}/\omega_2))(1-\exp(-e/\tau_2))$$

繰り返し載荷試験で測定された軸ひずみ、側方ひずみを弾性成分、塑性成分に分離し、それぞれのデータに対して式(9) のスペクトルおよび係数を定めると次のようになる。求まった応答関数を図．2に示す。

τ_1^e= 0.008 , ω_1^e= -0.00248 , a_1^e= 241.9819 , a_2^e= 26.3592 , a_3^e= 226.7738

τ_2^e= 0.002 , ω_2^e= -0.00345 , b_1^e= 98.8881 , b_2^e= 112.8376 , b_3^e= 197.4135

τ_1^p= 0.004 , ω_1^p= -0.00166 , a_1^p= 192.1715 , a_2^p= 47.7627 , a_3^p= 183.7437

τ_2^p= 0.003 , ω_2^p= -0.00174 , b_1^p= 43.7961 , b_2^p= 210.5723 , b_3^p= 184.7281

なお実験結果と考えあわせて、降伏は載荷の初期から始まるものと仮定した。

4．あとがき

ベクトル型降伏関数を用いることにより、三軸繰り返し載荷試験結果から弾性成分に関しても非線形な応答関数を作ることができ、これを用いて弾塑性構成則を誘導できることがわかった。

参考文献

市川康明：増分弾塑性理論と岩質材料の破壊過程に関する基礎的研究、名古屋大学博士論文（1986）
山本三三三：物体の変形学、誠文堂新光社(1972)