II-268　クノイド波理論第1次近似解の数値計算法とその応用

横浜国立大学工学部　正員　磯部 雅彦

<u>1. 緒言:</u> クノイド波理論第1次近似解は浅海条件において有限振幅性の影響を含めた理論であるため、これによってある程度の精度で沿岸域の波を記述することができる。この解の中には楕円積分や楕円関数が含まれるが、このためにストークス波と比べると若干数値計算が面倒に見える。しかし、楕円関数などの数値計算のプログラムに利用されているノームによる級数展開形は極めて収束が速いため、実際の計算時間はわずかで済む。本論文ではこの点に着目し、クノイド波理論の第1次近似解と楕円積分・楕円関数の級数展開形とを組み合わせた簡単で精度の高い数値計算法を紹介するとともに、その応用例について述べる。なお、ここでの手法は高次の解の数値計算にも用いることができる。

<u>2. 楕円積分と楕円関数の級数展開形:</u> クノイド波理論が用いられるのは浅海条件の場合であり、楕円関数の母数kについて $k^2>1/2$ と考えてよい。この場合、補ノーム $\bar{q}$（$<e^{-\pi}=0.043\cdots$）による楕円積分や楕円関数のべき級数の収束が速い。有効数字7けたまで得られる範囲でこれを示せば（Abramowitz・Stegun, 1972）、

$$k=(T_{02}/T_{03})^2\ ,\quad \bar{k}=4\sqrt{\bar{q}}\,(T_{04}/T_{03})^2\ ,\quad K=(T_{03})^2(-\ln\bar{q})/2\ ,\quad E=[1-\{S-(T_{03})^4\}(-\ln\bar{q})/2]/(T_{03})^2$$

$$cn(\theta;k)=(T_{04}/T_{02})(T_2(\bar{\theta})/T_4(\bar{\theta}))\ ,\quad sn(\theta;k)=(T_{03}/T_{02})(T_1(\bar{\theta})/T_4(\bar{\theta}))\ ,\quad dn(\theta;k)=(T_{04}/T_{03})(T_3(\bar{\theta})/T_4(\bar{\theta}))$$

$$\bar{\theta}=\theta/(T_{03})^2\qquad(|\theta|\leqq K)$$

$$T_1(\bar{\theta})=\sinh\bar{\theta}-\bar{q}^2\sinh 3\bar{\theta}+\bar{q}^6\sinh 5\bar{\theta}-\cdots\cdots\ ,\quad T_2(\bar{\theta})=1-2\bar{q}\cosh 2\bar{\theta}+2\bar{q}^4\cosh 4\bar{\theta}-\cdots\cdots$$

$$T_3(\bar{\theta})=1+2\bar{q}\cosh 2\bar{\theta}+2\bar{q}^4\cosh 4\bar{\theta}+\cdots\cdots\ ,\quad T_4(\bar{\theta})=\cosh\bar{\theta}+\bar{q}^2\cosh 3\bar{\theta}+\bar{q}^6\cosh 5\bar{\theta}+\cdots\cdots$$

$$T_{02}\equiv T_2(0)=1-2\bar{q}+2\bar{q}^4-\cdots\cdots\ ,\quad T_{03}\equiv T_3(0)=1+2\bar{q}+2\bar{q}^4+\cdots\cdots$$

$$T_{04}\equiv T_4(0)=1+\bar{q}^2+\bar{q}^6+\cdots\cdots\ ,\quad S=1+8\bar{q}^2-8\bar{q}^4+\cdots\cdots$$

となる。ここに、kは母数，$\bar{k}$は補母数，KとEは第1種と第2種の完全楕円積分，cn・sn・dnはヤコビの楕円関数である。$|\theta|>K$ の場合の楕円関数の計算には、nを整数として、次の式を利用すればよい。

$$cn(\theta+2nK;k)=(-1)^n cn(\theta;k)\ ,\quad sn(\theta+2nK;k)=(-1)^n sn(\theta;k)\ ,\quad dn(\theta+2nK;k)=dn(\theta;k)$$

<u>3. クノイド波の解:</u> クノイド波理論第1次近似解は以下のように表わされる。

$$\eta=H\{cn^2(\theta;k)-\overline{cn^2}\}\ ,\quad u=\sqrt{g/h}\,\eta\ ,\quad w=\sqrt{g/h}\,H\frac{4Kh}{L}\frac{h+z}{h}cn(\theta;k)\,sn(\theta;k)\,dn(\theta;k)$$

$$p=\rho g(\eta-z)\ ,\quad \theta=2K(x/L-t/T)$$

ここに、ηは平均水面を基準とする水面変動，uは水平流速，wは鉛直流速，pは圧力，Hは波高，hは平均水深，Lは波長，Tは周期，xは水平座標，zは平均水面を基準とする鉛直座標，ρは密度，gは重力加速度であり、$\overline{cn^2}$はcn^2の一周期平均値を表わす。水深・周期・波高が与えられれば、波長L・母数kは次式で与えられる。

$$L=\sqrt{gh}\,T\ ,\quad U_s\equiv gHT^2/h^2=16k^2K^2/3$$

<u>4. 級数を用いた諸量の表示:</u> クノイド波の解に関する諸量を、母数kのかわりに補ノーム$\bar{q}$を使って級数表示するには、2. で挙げた展開式を利用すればよい。まず、水深・周期・波高から$\bar{q}$を求めるための式は、

$$(-\ln\bar{q})=\sqrt{3U_s/4}\,/(T_{02})^2$$

となる。$\bar{q}$の初期値を0として再代入法を使っても上式の収束は速い。$\bar{q}$が決定されれば、楕円積分や楕円関数の計算は 2. を利用すれば容易であり、従って 3. に挙げた水面変動などの諸量を計算するのも容易である。さらに、重要な平均量である波のエネルギー E_w，エネルギーフラックス F，ラディエーションストレス S_{xx}・S_{yy}，相対波頂高 η_c/H，skewness $\sqrt{\beta_1}$，kurtosis β_2 に対して級数表示を求めると次のようになる（Isobe, 1985）。

$$E_w=\rho gH^2 f_2\ ,\quad F=\rho gH^2\sqrt{gh}\,f_2\ ,\quad S_{xx}=\frac{3}{2}\rho gH^2 f_2\ ,\quad S_{yy}=\frac{1}{2}\rho gH^2 f_2$$

$$\eta_c/H = 1 - f_1 \ , \quad \sqrt{\beta_1} = f_3/(f_2)^{\frac{3}{2}} \ , \quad \beta_2 = f_4/(f_2)^2$$

$$f_1 = \mu - \lambda \ , \quad f_2 = -\mu^2 + \frac{2}{3}(1+2\lambda)\mu - \frac{\lambda}{3}(1+\lambda) \ , \quad f_3 = 2\mu^3 - 2(1+2\lambda)\mu^2 + \frac{2}{15}(4+19\lambda+19\lambda^2)\mu - \frac{4}{15}\lambda(1+\lambda)(1+2\lambda)$$

$$f_4 = -3\mu^4 + 4(1+2\lambda)\mu^3 + \frac{2}{15}(-16-61\lambda-61\lambda^2)\mu^2 + \frac{8}{105}(6+37\lambda+75\lambda^2+50\lambda^3)\mu + \frac{\lambda}{105}(-24-95\lambda-142\lambda^2-71\lambda^3)$$

$$\lambda \equiv k'^2/k^2 = 16\bar{q}\,(T_{04}/T_{02})^4 \ , \quad \mu \equiv E/k^2K = [\{2/(-\ln\bar{q})\} - S + (T_{03})^4]/(T_{02})^4$$

5. アーセル数が大きい場合の近似式：　アーセル数 U_s が大きい場合、級数において $\bar{q} \approx 0$ とおいてさしつかえない。この場合、$(-\ln\bar{q})$ を求めるための式および λ と μ は、

$$(-\ln\bar{q}) = \sqrt{3U_s/4} \ , \quad \lambda = 0 \ , \quad \mu = 2/(-\ln\bar{q}) = 4/\sqrt{3U_s}$$

となるので、4. に挙げた平均諸量はアーセル数の関数として explicit に表示される。

6. 応用例：　浅水変形について考える。エネルギーフラックス F が一定であることより、水深変化に伴う波高変化が求められる。特に、アーセル数が大きい場合について整理すると $Hh^{\frac{5}{2}}(\sqrt{U_s} - 2\sqrt{3}) = const.$ となるが、これは首藤(1974)の結果と一致する。

深海域からの浅水変形を考える場合に、近似度から考えてクノイド波理論第1次近似解に微小振幅波理論を接続すると、滑らかではないが連続的な波高変化が得られる(Isobe, 1985)。ここでは滑らかに接続するために、$F = E_w C_g = const.$ における群速度 C_g に微小振幅波理論によるものを使ってエネルギー E_w を求め、E_w から波高 H に換算するのにクノイド波理論第1次近似解による $H = \sqrt{E_w/\rho g f_2}$ を使うことにする。図-1は計算結果を示すが、首藤(1974)の結果とほぼ一致する。また、合田(1970)による砕波指標のうち、h/L_0 と H_b/h_b の関係を用いて砕波点を決定した場合に得られる砕波水深を、砕波水深を与える砕波指標と比較したものが図-2である。微小振幅波のみを用いた場合には砕波水深が実際よりもかなり小さくなってしまうのに対し、この手法ではかなりよく一致するようになることがわかる。

7. 結言：　砕波点付近などにおいてクノイド波理論第1次近似解の精度は必ずしも十分ではない。しかし、有限振幅性の影響をある程度含んでいるために、微小振幅波理論を用いるのに比較するとかなり精度が向上する場合が多い。ここで述べた諸表示式は、浅海域における有限振幅波に対する簡便な補正式として役立つものと思われる。

参考文献：　合田良実(1970)：砕波指標の整理について，土木学会論文報告集，第180号，pp. 39–49.
首藤伸夫(1974)：非線型長波の変形 ― 水路幅，水深の変化する場合 ―，第21回海講論文集，pp. 57–63.
Abramowitz, M. and I. A. Stegun (1972): Handbook of Mathematical Functions, §16, 17, Dover, 1046p.
Isobe, M. (1985): Calculation and application of first-order cnoidal wave theory, Coast Eng., Vol. 9, pp. 309–325.

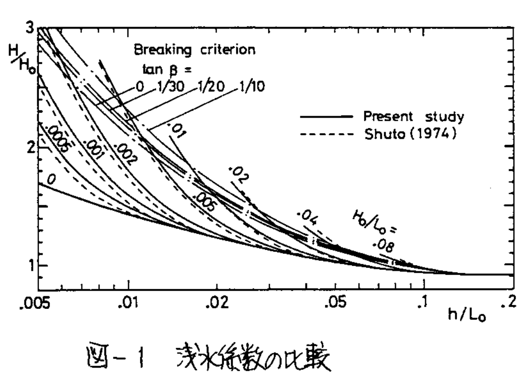

図-1　浅水係数の比較

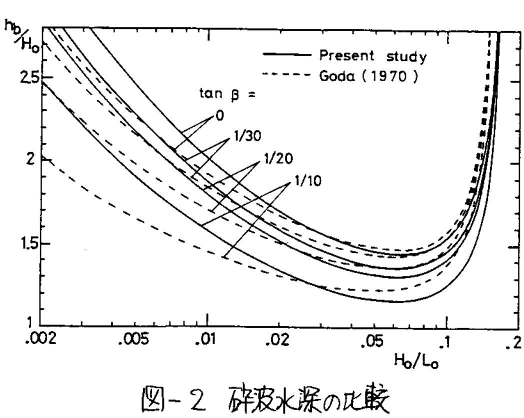

図-2　砕波水深の比較